Devoir Maison n$^{\mathrm{o}}$ 8

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 20 février 2025

Problème : résolution d'une équation de Pell-Fermat.

Les équations de Pell-Fermat sont des équations diophantiennes (autrement dit, on ne cherche que des solutions **entières**, éventuellement négatives), de la forme $x^2 - dy^2 = 1$, où x et y sont les deux inconnues, et d un paramètre entier naturel non nul. On cherchera notamment dans ce problème à résoudre l'équation pour $d = 13$.

A. Quelques généralités.

1. Résoudre entièrement l'équation dans le cas où $d = 4$. Généraliser à tous les cas où d est un carré parfait (cas qui sera exclu dans toute la suite du problème).
2. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, tel que $\exists \varepsilon > 0$, $G \cap]0, \varepsilon[= \emptyset$.
   (a) Démontrer que, $\forall x \in G$, x est le seul élément de G appartenant à l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.
   (b) Montrer que, soit $G = \{0\}$, soit G contient un plus petit élément strictement positif, qu'on notera a.
   (c) Montrer que, si $G \neq \{0\}$, $G = a\mathbb{Z}$.
3. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}^{+*})$ tel que $H \neq \{1\}$, et $\exists \varepsilon > 0$, $H \cap]1, 1 + \varepsilon[= \emptyset$. En exploitant la question précédente, décrire le groupe H le plus précisément possible.

B. L'anneau $\mathbb{Z}[d]$.

On rappelle qu'on suppose désormais que d n'est pas un carré parfait. On note alors $\mathbb{Z}_d = \{a + b\sqrt{d} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour tout élement $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}_d$, on note $N(x) = a^2 - db^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}_d$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
2. Montrer rigoureusement que $\sqrt{d}$ est un nombre irrationnel.
3. Montrer que, $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}_d^2$, $N(xy) = N(x)N(y)$. Montrer que le seul élément de $\mathbb{Z}_d$ vérifiant $N(x) = 0$ est 0.
4. Montrer que x est inversible dans $\mathbb{Z}_d$ si et seulement si $|N(x)| = 1$. On note I_d l'ensemble de ces éléments inversibles, et I_d^+ l'ensemble des inversibles strictement positifs.
5. De façon similaire, on note $U = \{x = a + b\sqrt{d} \mid a^2 - db^2 = 1\}$, et U^+ l'ensemble des éléments strictement positifs de U. Montrer que U^+ et I_d^+ sont des sous-groupes multiplicatifs de I_d, et que U^+ est un sous-groupe multiplicatif de U.
6. Montrer que, pour $d = 3$, l'équation $x^2 - 3y^2 = -1$ n'a aucun couple de solutions entières. En déduire que, dans ce cas, $U = I_d$.

C. Résolution de l'équation de Pell-Fermat.

On reprend ici les notations de la partie précédente, et on admet que $U^+ \neq \{1\}$ (on peut démontrer ce résultat de façon relativement élémentaire, mais c'est un peu pénible, je vous en dispense donc).

1. Soit $x = a + b\sqrt{d} \in U^+$. Montrer que $x > 1 \Leftrightarrow (a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$.
2. En exploitant la première partie, montrer que tous les éléments de U^+ sont de la forme α^n pour un certain réel $\alpha > 1$. On appellera désormais α le générateur du groupe multiplicatif U^+. Expliquer comment obtenir toutes les solutions de l'équation $x^2 - dy^2 = 1$ à l'aide de ce générateur.
3. Calculer α lorsque $d = 2$. En déduire les trois plus petits couples d'entiers naturels vérifiant $x^2 - 2y^2 = 1$.
4. On suppose que l'équation $x^2 - dy^2 = -1$ admet des solutions. On pose $z = x + y\sqrt{d}$, où (x, y) est une de ces solutions.
   (a) Montrer que $z > 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$.
   (b) En déduire que I_d^+ admet lui aussi un générateur qu'on note β. Quel lien existe-t-il entre α et β ?
5. On se concentre (enfin !) sur le cas $d = 13$.
   (a) Montrer que, si (x, y) est solution de $x^2 - 13y^2 = -1$, alors $x \equiv 0[6]$.
   (b) Quels sont les deux seules valeurs possibles pour la congruence de x modulo 13 ?
   (c) Trouver la plus petite solution de l'équation $x^2 - 13y^2 = -1$, en déduire la valeur du générateur β.
   (d) Déterminer le générateur α correspondant, puis donner les deux premières solutions de l'équation $x^2 - 13y^2 = 1$.