Devoir Maison n^o 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

4 novembre 2024

Problème

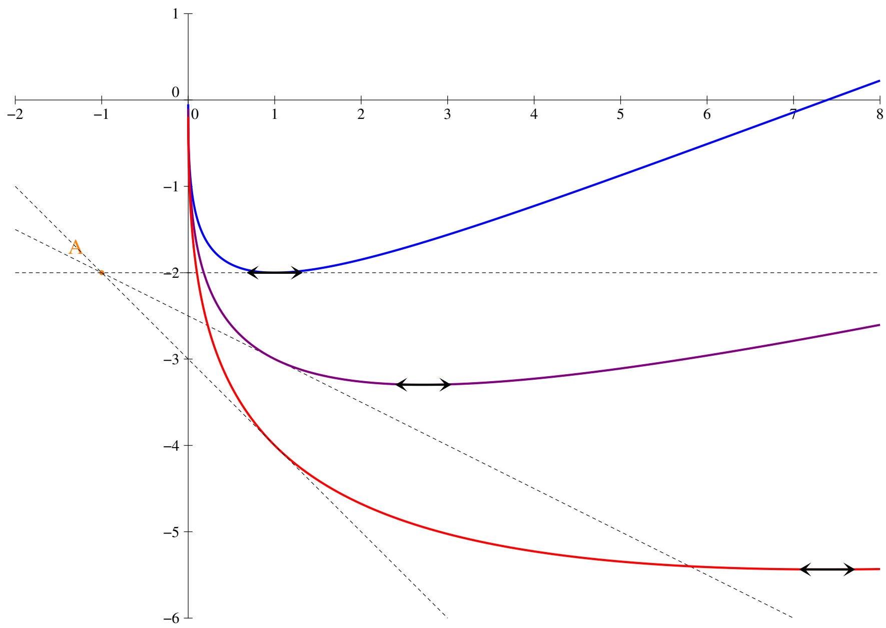
I. Quelques exemples dans le cas général.

1. La fonction f_λ est bien sûr dérivable sur $]0, +\infty[$, et $f'_\lambda(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x} + \dfrac{\lambda + \ln(x)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2 + \lambda + \ln(x)}{2\sqrt{x}}$.
2. La dérivée qu'on vient de calculer est du signe de $2 + \lambda + \ln(x)$, et s'annule donc lorsque $\ln(x) = -2 - \lambda$, soit pour $x = e^{-2-\lambda}$. La fonction f_λ est décroissante sur $]0, e^{-2-\lambda}]$ et décroissante sur $[e^{-2-\lambda}, +\infty[$, avec pour maximum $f_\lambda(e^{-2-\lambda}) = -2\sqrt{e^{-2-\lambda}}$. Par croissance comparée, on aura $\lim\limits_{x \to 0} f_\lambda(x) = 0$ (quelle que soit la valeur de λ), et bien sûr $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = +\infty$. En résumé :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & e^{-2-\lambda} & & +\infty \\
\hline
 & & & & & +\infty \\
f & 0 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & -2\sqrt{e^{-2-\lambda}} & &
\end{array}$$

3. On calcule $f_\lambda(1) = \lambda$, et $f'_\lambda(1) = \dfrac{2+\lambda}{2} = 1 + \dfrac{1}{2}\lambda$, pour obtenir l'équation de la tangente : $y = \left(1 + \dfrac{1}{2}\lambda\right)(x - 1) + \lambda = \left(1 + \dfrac{1}{2}\lambda\right)x - 1 + \dfrac{1}{2}\lambda$.
4. On peut écrire l'équation de tangente précédente sous la forme suivante : $y = x - 1 + \dfrac{1}{2}\lambda(x+1)$. Pour que toutes les droites se coupent en un même point, il faut trouver une valeur de x pour laquelle y est indépendant de λ. La forme qu'on vient d'écrire montre que c'est le cas lorsque $x + 1 = 0$, donc $x = -1$, où on obtient $y = -2$. Toutes les tangentes se coupent donc en $A(-1, -2)$.
5. Quelques éléments concrets avant de tracer les courbes :
   - pour $\lambda = -2$, le minimum de f est atteint en $x = e^0 = 1$, et a pour valeur $f_{-2}(1) = -2$, et la tangente en 1 est donc horizontale, d'équation $y = -2$.
   - pour $\lambda = -3$, le minimum de f est atteint en $x = e^1 = e$, et a pour valeur $f_{-3}(e) = -2\sqrt{e} \simeq -3.3$, et la tangente en 1 a pour équation $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$.
   - pour $\lambda = -4$, le minimum de f est atteint en $x = e^2$, et a pour valeur $f_{-4}(e^2) = -2e$, et la tangente en 1 a pour équation $y = -x - 3$.

   Si on veut une idée encore plus précise de l'allure des courbes, on peut déterminer facilement le point où elles vont recouper l'axe des abscisses, ce qui se produit lorsque $\ln(x) = -\lambda$, donc pour $x = e^{-\lambda}$ (les valeurs sont toutefois trop grandes pour être facilement représentables). Ci-dessous, la courbe de f_{-2} en bleu, celle de f_{-3} en violet et celle de f_{-4} en rouge :



6. (a) On est en présence d'une équation linéaire normalisée du premier ordre, qu'on va résoudre sur l'intervalle $]0,+\infty[$ (seul intervalle sur lequel elle a un sens, à cause du membre de droite de l'équation). Les solutions de l'équation homogène associée $y' - \dfrac{1}{2x}y$ sont les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{\frac{1}{2}\ln(x)} = K\sqrt{x}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On va ensuite chercher une solution particulière y_p de l'équation (E) par la méthode de variation de la constante. On pose donc $y_p(x) = K(x)\sqrt{x}$, et on dérive pour obtenir $y_p'(x) = K'(x)\sqrt{x} + \dfrac{K(x)}{2\sqrt{x}}$. La fonction y_p est donc solution de (E) si $K'(x)\sqrt{x} + \dfrac{K(x)}{2\sqrt{x}} - \dfrac{K(x)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc si $K'(x) = \dfrac{1}{x}$. ce sera le cas en posant $K(x) = \ln(x)$, ce qui prouve que la fonction définie par $y_p(x) = \sqrt{x}\ln(x)$ est solution de l'équation (E). Toutes les solutions de l'équation sont alors de la forme $y : x \mapsto K\sqrt{x} + \ln(x)\sqrt{x} = (K + \ln(x))\sqrt{x}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Autrement dit, les solutions de (E) sont exactement les fonctions f_λ, quand λ varie dans $\mathbb{R}$.

   (b) De façon évidente, la condition $y(1) = \lambda$ impose $K = \lambda$, la solution recherchée est donc la fonction f_λ.

7. On a déjà calculé plus haut $f_\lambda'(x) = \dfrac{2 + \lambda + \ln(x)}{2\sqrt{x}}$, et si k est un réel quelconque, alors $kf_\lambda\left(\dfrac{1}{x}\right) = k(\lambda - \ln(x))\sqrt{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{k\lambda - k\ln(x)}{\sqrt{x}}$. Ces deux expression sont égales à condition d'avoir $1 + \dfrac{1}{2}\lambda = k\lambda$, et $k = -\dfrac{1}{2}$. Dans ce cas, on doit donc avoir $1 + \dfrac{1}{2}\lambda = -\dfrac{1}{2}\lambda$, donc $\lambda = -1$. La fonction f_{-1} est donc solution de l'équation fonctionnelle f_λ pour $k = -\dfrac{1}{2}$.

II. Résolution complète dans le cas où $k = -\dfrac{1}{2}$.

1. La fonction g est dérivable, et $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{x}} - \dfrac{f(x)}{2x^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}f\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{\sqrt{x}}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Or, par hypothèse, $f'(x) = -\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, et on a donc aussi $f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{2}f(x)$ (il suffit d'appliquer la relation à $\dfrac{1}{x}$, qui est tout autant un réel strictement positif que x). Les termes constituant

la dérivée $g'(x)$ se simplifient alors gentiment deux à deux : $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{x}} = -\dfrac{f(x)}{2\sqrt{x}}$ s'annule avec le troisième terme, et le dernier terme $-\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{f(x)}{2x\sqrt{x}}$ s'annule avec le deuxième. Il reste donc $g'(x) = 0$, et la fonction g est constante.

2. D'après la question précédente, on a pour tout réel strictement positif $g(x) = g(1) = 2f(1)$, donc $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2f(1)$. En remplaçant à l'aide de la relation $(*)$, on en déduit que $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} - 2f'(x)\sqrt{x} = 2f(1)$, soit en divisant tout par $-2\sqrt{x}$: $f'(x) - \dfrac{f(x)}{2x} = -\dfrac{f(1)}{\sqrt{x}}$.
3. Si $f(1) = 0$, alors f est solution de l'équation homogène résolue au début de la question $I.6$, donc $f(x) = K\sqrt{x}$. Mais comme $f(1) = 0$, on a nécessairement $K = 0$ et f est la fonction nulle.
4. Une résolution quasiment identique à celle de la question $I.6$ donne $f(x) = (K - f(1)\ln(x))\sqrt{x}$. En remplaçant x par 1, on doit avoir $K = f(1)$, donc $f(x) = f(1)(1 - \ln(x))\sqrt{x}$. Autrement dit, il existe une constante rélle K telle que $f = Kf_{-1}$, avec les notations de la première partie. Réciproquement, toutes ces fonctions conviennent, puisqu'on a déjà prouvé que f_{-1} était solution de $(*)$ pour $k = -\dfrac{1}{2}$, et que la multiplication par K ne change rien à la validité de l'équation (membre de gauche et membre de droite seront tous deux multipliés par cette même constante K).

III. Résolution lorsque $k \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$.

1. En posant $y(x) = x^\alpha$, on a $y''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$. La fonction y est donc solution de (E_k) si $\alpha(\alpha - 1)x^\alpha + k^2x^\alpha = 0$, ce qui sera évidemment vérifié si $\alpha(\alpha - 1) + k^2 = 0$, soit $\alpha^2 - \alpha + k^2 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 - 4k^2$, qui est strictement positif avec les hypothèses bienvenues faites sur le réel k. Elle admet donc deux solutions : $\alpha_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4k^2}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4k^2}}{2}$. Parmi les deux, c'est manifestement α_1 qui est supérieure à $\dfrac{1}{2}$.
2. Il est bien sûr hors de question de remplacer α par la valeur qu'on vient de calculer, le but est de faire un calcul purement formel. On a posé $y(x) = x^\alpha z(x)$, donc $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}z(x) + x^\alpha z'(x)$, et $y''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}z(x) + 2\alpha x^{\alpha-1}z'(x) + x^\alpha z''(x)$. Pour que y soit solution de (E_k), on doit donc avoir $\alpha(\alpha-1)x^\alpha z(x) + 2\alpha x^{\alpha+1}z'(x) + x^{\alpha+2}z''(x) + k^2x^\alpha z(x) = 0$. Or, par hypothèse, $\alpha(\alpha - 1) + k^2 = 0$, donc il ne reste en fait que l'équation $2\alpha x^{\alpha+1}z'(x) + x^{\alpha+2}z''(x) = 0$. En posant $w(x) = z'(x)$ et en simplifiant tout par $x^{\alpha+1}$ (qui ne s'annule jamais sur notre intervalle de résolution), on se ramène donc à l'équation $2\alpha w(x) + xw'(x) = 0$. Cette équation (E'_k) est bien une équation linéaire du premier ordre.
3. On normalise l'équation, qui a le bon goût d'être déjà homogène : $w'(x) + \dfrac{2\alpha}{x}w(x) = 0$ a pour solutions les fonction $w : x \mapsto Ke^{-2\alpha\ln(x)} = Kx^{-2\alpha}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Puisqu'on a posé $w(x) = z'(x)$, on en déduit que les fonctions z solutions sont de la forme $z(x) = Ax^{1-2\alpha} + B$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ (quitte à changer le nom de la constante réelle, la division par $1 - 2\alpha$ qui ne peut pas être nul n'a aucune influence sur la forme obtenue). Autrement dit, les solutions de l'équation (E_k) sont les fonctions y définies par $y(x) = z(x)x^\alpha = Ax^{1-\alpha} + Bx^\alpha$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
4. En reprenant la formule obtenue pour α_1 au début de cette partie, si $k = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, alors $\alpha =$

$\dfrac{1+\sqrt{1-4\times\frac{2}{9}}}{2} = \dfrac{1+\frac{1}{3}}{2} = \dfrac{2}{3}$. Les solutions sont alors données par les expressions suivantes : $y(x) = Ax^{\frac{1}{3}} + Bx^{\frac{2}{3}}$.

Si on impose $y(1) = 0$, on obtient la condition $A + B = 0$. De plus, $y'(x) = \dfrac{1}{3}Ax^{-\frac{2}{3}} + \dfrac{2}{3}Bx^{-\frac{1}{3}}$, donc la deuxième condition $y'(1) = -1$ impose cette fois-ci $\dfrac{1}{3}A + \dfrac{2}{3}B = -1$. On doit donc avoir $B = -A$ et $\dfrac{1}{3}A - \dfrac{2}{3}A = -1$, soit $A = 3$ et $B = -3$. L'unique solution recherchée est donc définie par $y(x) = 3(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}})$.

5. La question qu'on se pose évidemment en arrivant au bout de ce devoir à la maison, c'est « mais quel rapport entre l'équation (E_k) et ce qui précède » ? Eh bien, repartons du début, et donc de la relation $(*)$. Si f la vérifie, elle est nécessairement dérivable deux fois (puisque f' est dérivable justement à cause de la relation $(*)$ qui la relie à f). On peut alors dériver $(*)$ pour obtenir $f''(x) = -\dfrac{k}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$, puis remplacer dans le membre de droite en utilisant le fait que $f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = kf(x)$ pour en déduire qu'une fonction f vérifiant la relation $(*)$ est nécessairement solution de l'équation différentielle $f'' = -\dfrac{k^2}{x^2}f$ qui n'est autre que l'équation (E_k) (il suffit de multiplier tout par x^2). Les calculs qu'on vient d'effectuer prouvent donc que f peut être écrite sous la forme $f(x) = Ax^{1-\alpha} + Bx^{\alpha}$, avec α solution de l'équation $x^2 - x - k^2 = 0$ (peu importe quon choisisse la « bonne » solution ou non, puisque $1-\alpha$ sera alors l'autre solution de l'équation).

   On n'a toutefois pas fini les calculs, car il faut vérifier la réciproque des affirmations précédentes, toutes les fonctions obtenues n'étant pas forcément des solutions du problème initial (la dérivation effectuée en cours de route ne donne pas une équation équivalente à l'équation $(*)$). Supposons alors que $f(x) = Ax^{1-\alpha} + Bx^{\alpha}$, on a donc $f'(x) = A(1-\alpha)x^{-\alpha} + B\alpha x^{\alpha-1}$. D'autre part, $kf\left(\dfrac{1}{x}\right) = kAx^{1-\alpha} + kBx^{\alpha}$. Les deux expressions sont égales si le système suivant est vérifié : $\left\{\begin{array}{ccc} A(1-\alpha) & = & kB \\ B\alpha & = & kA \end{array}\right.$. La deuxième équation impose donc $B = \dfrac{k}{\alpha}B$, et (quitte à tout multiplier par α) la première devient $A\alpha(1-\alpha) = k^2A$, qui est toujours vérifiée à cause de la condition imposée au départ sur α. Autrement dit, toutes les fonctions f définies par $f(x) = A\left(x^{1-\alpha} + \dfrac{k}{\alpha}x^{\alpha}\right)$, avec $A \in \mathbb{R}$ et $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{1-4k^2}}{2}$, sont solutions de l'équation $(*)$ lorsque $k \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$.