Devoir Maison n° 12

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 3 juin 2025

ESSEC 2016, le retour

Vous avez été nombreux à me faire part de votre enthousiasme concernant le problème du DS de samedi dernier (ah tiens, maintenant que je le dis, en fait, je ne retrouve plus trace des messages où vous me disiez tous en vouloir un autre du même tonneau au devoir bilan, c'est curieux), qui était constitué uniquement des deux premières parties de l'interminable problème posé au concours de l'ESSEC en 2016. Comme il eût été dommage de s'arrêter en si bon chemin, voici les deux dernières parties de ce même problème. Elles ne nécessitent normalement pas d'avoir traité le début du problème pour être abordées, mais bien entendu, rien ne vous empêche de (re)faire les questions de ces deux premières parties que vous n'auriez pas eu le temps de traiter samedi si le coeur vous en dit.

III. Développement eulérien de la fonction sinus.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et tout réel $x \in [0, 1[$, on pose $\alpha_n(x) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$ et $\beta_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)$.

1. Montrer que la série $\sum \alpha_n(x)$ converge quand x est fixé appartenant à $[0, 1[$. On notera $\beta(x) \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \beta_n(x)$.
2. On fixe dans cette question un réel $x \in]0, 1[$.
   (a) Pour $N \geqslant 1$, exprimer $\displaystyle\int_0^x \sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2 - t^2}\, dt$ en fonction de $\beta_N(x)$.
   (b) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^x \varphi(t) - \frac{1}{t}\, dt$ (ici, comme dans la suite de l'énoncé, φ est la fonction étudiée au début du problème, on pourra reprendre si besoin les propriétés de la fonction φ données dans l'énoncé de la partie I du problème).
   (c) Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^x \varphi(t) - \frac{1}{t}\, dt - \int_0^x \sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2 - t^2}\, dt\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.
   (d) En déduire que $\beta(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t) - \frac{1}{t}\, dt$.
   (e) Conclure enfin que $\forall x \in]0, 1[$, $\beta(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$.
3. Pour tout réel x et tout entier $n \geqslant 1$, on pose $P_n(x) = \pi x \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$.
   (a) Montrer que, si $x \in [0, 1[$, la suite $(P_n(x))$ converge. On notera $P(x)$ sa limite, qu'on se permettra aussi d'écrire sous la forme $P(x) = \pi x \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.
   (b) Montrer que, $\forall x \in [0, 1[$, $P(x) = \pi x e^{\beta(x)} = \sin(\pi x)$.
   (c) Montrer que la suite $(P_n(x))$ converge en fait pour tout réel. On continue à noter $P(x)$ sa limite.
   (d) Soit $x \in] - n, n[$ pour un entier $n \geqslant 1$, montrer que $P_n(x + 1) = -\dfrac{n + 1 + x}{n - x} P_n(x)$.

(e) En déduire la relation $P(x+1) = -P(x)$, valable sur $\mathbb{R}$, puis montrer que la fonction P est 2-périodique.

(f) Montrer enfin que l'égalité $P(x) = \sin(\pi x)$ est valable sur $\mathbb{R}$ tout entier. On a ainsi prouvé l'égalité $\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$, qui constitue ce qu'on appelle développement eulérien de la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$.

IV. Un autre développement du sinus.

Dans cette partie, on reprend la notation $D = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ définie en début de problème, et on pose, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \in D\cup\{0\}$, $\lambda_n(x) = \int_0^\pi \cos(xt)\cos(nt)\,dt$, et $v_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x}{n^2 - x^2}$. On définit enfin, quand ça a un sens (donc quand la série converge) une fonction ψ par $\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x}{n^2-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$.

1. Montrer que la fonction ψ est bien définie sur $D \cup \{0\}$.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $\forall x \in D \cup \{0\}$, $\lambda_n(x) = \sin(\pi x)v_n(x)$ (un peu de révision de formules de trigo en perspective).
3. Pour tout réel t, on pose $C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$.

   (a) Que vaut $C_n(t)$ lorsque $t = 2p\pi$, avec p entier relatif ?

   (b) Si t n'est pas de la forme $2p\pi$, montrer que $C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$ (ça, normalement, c'est une question de cours pour vous...).

   (c) Donner la valeur de $I_n = \int_0^\pi C_n(t)\,dt$.
4. Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, montrer à l'aide d'une IPP que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi F(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\,dt = 0$.
5. Pour $x \in D$, on définit une fonction Φ_x sur $]0,\pi]$ par $\Phi_x(t) = \frac{\cos(xt)-1}{\sin(\frac{t}{2})}$.

   (a) Montrer que Φ_x peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

   (b) Vérifier que $\forall t \in [0,\pi]$, $C_n(t)(\cos(xt)-1) = -\frac{1}{2}(\cos(xt)-1) + \frac{1}{2}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)$.

   (c) En déduire que, $\forall x \in D$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x) = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\,dt + I_n$.
6. (a) Démontrer que, $\forall x \in D$, $\psi(x)\sin(\pi x) = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{x}{2}$.

   (b) En déduire que, $\forall x \in D$, $\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-x^2}$.