Devoir Maison n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 9 septembre 2024

Exercice 1

Déterminer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse. On justifiera bien sûr soigneusement chacune des réponses proposées (contre-exemple, démonstration rigoureuse etc. selon les cas).

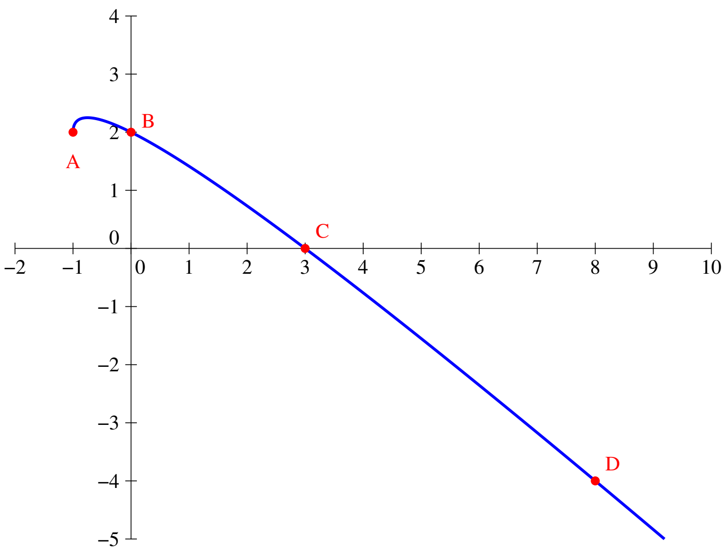
1. La fonction tangente est périodique de période 2π.
2. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites monotones, leur somme $(u_n + v_n)$ est également monotone.
3. Un nombre $n \in \mathbb{N}$ est pair si et seulement si son carré n^2 est pair.
4. L'ensemble $\mathbb{R}^{+*}$ admet un plus petit élément.
5. En lançant cinq fois de suite une pièce équilibrée à Pile ou Face, on a plus de neuf chances sur dix d'obtenir deux fois de suite le même résultat à un moment donné.
6. L'équation $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 6z + 2 = 0$ admet quatre solutions distinctes dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2

Effectuer l'étude la plus complète possible de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ (tous les calculs devront bien entendu apparaître sur la copie).

Exercice 3

Le but de ce dernier exercice est de tracer une jolie courbe paramétrée. Une courbe paramétrée est définie par deux équations faisant varier l'abscisse x et l'ordonnée y d'un point en fonction du temps t. Quand on représente graphiquement une telle courbe, on se contente de placer dans un repère tous les points de coordonnées $(x(t), y(t))$ pour les différentes valeurs possibles de t, **sans** représenter explicitement la variable t. Ainsi, si on définit par exemple notre courbe par les équations $x(t) = t - 1$ et $y(t) = \sqrt{t} - t + 2$, avec $t \in [0, +\infty[$ (ici, les valeurs de t négatives sont manifestement exclues), alors la courbe va « démarrer » au point de coordonnées $(x(0), y(0))$, donc au point $(-1, 2)$. Ensuite, x et y vont varier simultanément et la courbe suivra leur évolution. Ci-dessous, je vous donne (sans justification) une allure de la courbe obtenue, en surlignant les points de passage $A(-1, 2)$ (pour $t = 0$), $B(0, 2)$ (atteint pour $t = 1$), $C(3, 0)$ (atteint pour $t = 4$) et $D(8, -4)$ (atteint pour $t = 9$).



La courbe que je viens de vous tracer ressemble à celle d'une fonction « normale » mais ce ne sera pas toujours le cas, comme on va déjà le voir avec celle que vous allez désormais étudier, définie par les équations $x(t) = 2\cos(t) - \cos(2t)$ et $y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)$, le paramètre t variant a priori dans $\mathbb{R}$ tout entier. On notera $(\mathcal{C})$ la courbe paramétrée correspondante.

1. Déterminer la période des fonctions x et y. Expliquer rapidement pourquoi on peut se contenter de faire varier t dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ pour le tracé de la courbe $\mathcal{C}$.
2. Déterminer la parité des fonctions x et y. Quelle symétrie peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$? Sur quel intervalle va-t-on finalement étudier les fonctions ?
3. Résoudre dans l'intervalle $[0, \pi]$ les équations $\cos(x) = \cos(2x)$ et $\sin(x) = \sin(2x)$. On pourra bien sûr exploiter les formules trigonométriques de duplication si besoin.
4. Calculer les dérivées des fonctions x et y, puis déterminer leurs variations sur l'intervalle $[0, \pi]$. On dressera un tableau de variations commun pour les deux fonctions, en précisant bien tous les points où au moins l'une des deux dérivées s'annule. On précisera aussi les valeurs intéressantes prises par les fonctions x et y (maxima ou minima locaux notamment).
5. On admet que le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$ est tangent à la courbe $(\mathcal{C})$ en son point de paramètre t (si jamais ce vecteur est nul, ce sera le vecteur $(x''(t), y''(t))$ qui jouera le rôle de vecteur tangent, et ainsi de suite si ce deuxième vecteur est à nouveau nul, ce qui ne devrait toutefois pas vous arriver avec ces fonctions). Préciser le vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en chacun des points où on a $x'(t) = 0$ ou $y'(t) = 0$ (toujours en se limitant à l'intervalle $[0, \pi]$ pour la variable t).
6. Dans un répère orthonormal, placer tous les points de la courbe $\mathcal{C}$ étudiés précédemment en indiquant à chaque fois le vecteur tangent, et en déduire une allure de la courbe $\mathcal{C}$ (en gros, contentez-vous de relier les points importants de la façon la plus crédible possible ; vous pouvez bien sûr rajouter quelques points supplémentaires pour lesquels le calcul des coordonnées et du vecteur tangent n'est pas compliqué, par exemple pour $t = \dfrac{\pi}{6}$ ou $t = \dfrac{\pi}{4}$).

Pour votre information, la courbe étudiée ici s'appelle une **cardioïde**, son nom étant censé découler du fait qu'elle a une forme de cœur (probablement dessiné par quelqu'un d'aussi doué que moi pour les arts plastiques ; on peut tracer des cœurs beaucoup plus convaincants avec d'autres courbes paramétrées !). C'est une courbe classique qui intervient dans tout un tas de problèmes physiques (reflets dans une tasse de café, pour donner un exemple classique), vous trouverez facilement tous les détails que vous voulez à son sujet sur Internet.