Chapitre 25 : Séries numériques, famille sommables.

MPSI Lycée Camille Jullian

8 juin 2023

L'homme n'est rien d'autre que la série de ses actes.

Friedrich Hegel.

Objectifs du chapitre :

- savoir prouver correctement la convergence d'une série numérique à l'aide des divers théorèmes de comparaison disponibles.
- effectuer un calcul de somme dans un cas simple ou classique.
- comprendre le principe des familles sommables, et savoir les manipuler dans des cas très simples.

Introduction historique.

Revenons pour introduire ce chapitre quelques siècles en arrière, au temps de Zénon d'Élée, philosophe grec du cinquième siècle avant J-C. Celui-ci est resté célèbre pour sa position très sceptique vis-à-vis de certaines théories scientifiques développées à l'époque (notamment par Platon) concernant la divisibilité du temps et des mouvements, et nous a laissé quelques célèbres paradoxces à méditer à ce sujet. En gros, Zénon considérait carrément que le mouvement était impossible et prétendait le démontrer à l'aide de raisonnements menant à des absurdités manifestes (comme on peut penser que Zénon n'était en fait pas un débile complet et savait très bien que le mouvement existait, il s'agissait probablement plutôt d'une tentative de montrer qu'il est absurde de considérer le temps comme infiniment divisible, et de le voir comme une quantité intrinsèquement continue. Mais bon, on ne va pas se lancer dans un cours de philosophie aujourd'hui).

Le plus connu de ces paradoxes est peut-être celui de la course entre Achille et la tortue. Un beau jour, donc, Zénon décide d'organiser une course entre une tortue (animal réputé pour sa capacité à gagner des courses improbables, comme chacun sait) et Achille, héros grec bien connu pour sa vitesse (qualifié par Homère dans l'Iliade d'« Achille aux pieds légers », ce qui est confirmé par ~~l'immonde bouse~~ le film hollywoodien *Troie* où on voit régulièrement Brad Pitt littéralement voler au-dessus de ses ennemis). Bref, pour fixer les idées, supposons qu'Achille court à 10 mètres par seconde (à peu de choses près la vitesse d'un record du monde de 100 mètres par un athlète pas trop dopé), et la tortue (qui, elle, doit être un peu dopée) à 1 mètre par seconde. Pour équilibrer un peu les choses, Achille s'élance avec cent mètres de retard. Quand va-t-il rejoindre la tortue ? La réponse un peu surprenante de Zénon est : « jamais ». Voici son raisonnement : le temps qu'Achille parcoure ses cent mètres, la tortue en a franchi dix, et Achille est toujours derrière. Pas grave, continuons à courir, et faisons parcourir à Achille dix mètres supplémentaires. Sauf que, pendant ce temps, la tortue va elle-même parcourir un mètre de plus ! On peut faire une troisième étape où Achille parcourt un mètre et la tortue dix centimètres et ainsi de suite. On aura beau multiplier les étapes, Achille sera toujours derrière.

Comment résoudre le paradoxe ? Regardons les choses d'un point de vue temporel : Achille met 10 secondes pour franchir les cent premiers mètres, puis une seconde supplémentaire pour les dix mètres suivants, $\frac{1}{10}$ seconde pour le mètre suivant etc. Au total, Achille met donc $10+1+\frac{1}{10}+\dots$ secondes avant de rejoindre la tortue. La somme constituant ce calcul est bel et bien constituée d'une infinité d'étapes, mais il n'empêche qu'elle converge quand même (avec le vocabulaire mathématique moderne) vers un nombre **fini**. Tout ce que Zénon a démontré, c'est donc qu'Achille ne rattrapera pas la tortue après un nombre fini d'étapes, mais absolument pas qu'il ne rattraperait pas la tortue en un **temps** fini. Mine de rien, cachée derrière cet exemple en apparence idiot, se trouve la définition d'un outil mathématique très puissant mais loin d'être évident à comprendre et à manipuler : celle de la série numérique. C'est exactement ce qu'on vient de croiser : une somme d'un nombre infini de réels strictement positifs donnant un résultat fini. Vérifions d'ailleurs qu'on est capable de prouver la convergence de la somme et de calculer sa limite. En notant S_n le temps écoulé pendant les n premières étapes de la course, on a $S_1 = 10$, $S_2 = 10 + 1 = 11$, $S_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = \frac{111}{10}$ etc. En fait, pour tout entier naturel n, on aura $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{10^{n-1}}$, ou si on préfère $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k-2}}$. On sait très bien calculer explicitement la valeur de S_n puisqu'il s'agit d'une somme géométrique : en décalant les indices, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10^{k-1}} = 10 \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{10}\right)^k$. On applique la formule bien connue : $S_n = 10 \times \frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$. Il reste tout de même une étape à faire, un passage à la limite (sans difficulté ici) pour obtenir $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{100}{9}$. On se permettra d'écrire pour plus de lisilité $10+1+\frac{1}{10}+\dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k-2}} = \frac{100}{9}$, mais il faut bien avoir conscience qu'une « somme infinie » n'est en fait qu'une limite de somme convergente (et se méfier quand on manipule ces écritures, on ne peut pas faire les mêmes manipulations qu'avec des sommes finies). Bien entendu, la valeur $\frac{100}{9}$, qui correspond donc au temps mis par Achille pour rejoindre la tortue, aurait pu être trouvée par des méthodes plus basiques (en écrivant par exemple les équations du mouvement de la tortue et d'Achille dans un repère dont l'origine est la position initiale d'Achille).

1 Définitions

Définition 1. Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. La **série de terme général** u_n est la suite (S_n) des sommes partielles de la suite (u_n). Autrement dit, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On note cette série $\sum u_n$.

Remarque 1. On peut construire des séries à partir de suites qui ne sont pas définies à partir de $n = 0$. Dans ce cas, on changera naturellement la valeur de départ dans la somme : si (u_n) est par exemple définie pour $n \geqslant 1$, on pose $\forall n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Remarque 2. Il faut faire très attention dans le cadre des séries à bien manier le vocabulaire. Ce qu'on appelle le terme général (noté u_n) de la série est ce qui se trouve à l'intérieur de la somme définissant la série. Il ne faut surtout pas le confondre avec le terme d'indice n de la série, qui sera noté S_n et qui est égal à $\sum_{k=0}^{n} u_k$. Le fait qu'on note la série toute entière (la suite (S_n) donc) avec une somme « sans indices » n'aide pas vraiment à simplifier les choses mais c'est une notation standard.

Exemple : La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ (pour $n \geqslant 1$) est définie par $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$. Attention à ne pas confondre u_n et S_n : les premiers termes de la suite (u_n) sont $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_3 = \frac{1}{9}$. Ceux de la série (S_n) sont $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $S_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$. Précisons à nouveau que la notation $\sum \frac{1}{n^2}$ (sans indice) désigne la même chose que (S_n) (la série, autrement dit la suite des sommes). Dans cet exemple simple, il est évident que la suite (u_n) converge vers 0, mais la nature de la série $\sum u_n$ est beaucoup moins évidente (la suite (S_n) est manifestement croissante, mais sa convergence est beaucoup plus difficile à prouver, et la valeur de sa limite est carrément impossible à calculer par des méthodes basiques, comme vous le savez déjà depuis un certain temps).

Définition 2. La série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite (S_n) a une limite finie. Dans ce cas, la limite de la suite (S_n) est appelée **somme de la série**, et notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Dans le cas contraire, la série est dite divergente. Déterminer la nature d'une série revient à déterminer si elle est convergente.

Remarque 3. **Attention**, comme signalé précédemment, la convergence de la suite (u_n) et celle de la série $\sum u_n$ ne sont pas du tout la même chose ! La convergence d'une série revient à celle des sommes partielles de la suite (u_n), elle dépend en fait principalement du fait que la suite (u_n) converge **vite** vers 0 (on va voir rapidement que la convergence de (u_n) vers 0 est une condition nécessaire pour que la série $\sum u_n$ puisse converger, mais absolument pas suffisante, contrairement à ce que des générations d'étudiants inattentifs continuent à essayer de prétendre dans leurs copies), ou qu'il y ait des compensations entre les différents termes qu'on additionne (ce qui suppose que ces termes soient de signe opposé). Il faut par ailleurs faire très attention à la manipulation des sommes infinies. On ne peut utiliser cette notation qu'à partir du moment où on sait que la série converge, et on ne peut pas manipuler ces sommes aussi aisément que des sommes finies. Dans tous les cas, il est indispensable de s'assurer de la convergence d'une série avant d'utiliser ces sommes, c'est pourquoi on commence toujours, lors de l'étude d'une série inconnue, par étudier les sommes partielles, puis passer à la limite (on peut aussi éventuellement utiliser des théorèmes généraux assurant la convergence de la série sans faire le calcul à la main).

Exemple : Dans l'exemple de l'introduction, la série (S_n) était convergente, avec une somme égale à $\frac{100}{9}$.

Exemple : Il peut arriver qu'on puisse démontrer la convergence d'une série sans pour autant savoir calculer sa somme. Reprenons l'exemple de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. La suite (S_n) étant une somme de termes positifs, elle est croissante (si on veut être ultra rigoureux, on écrit $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$), elle sera donc convergente si et seulement si elle est majorée (thèorème de convergence monotone). Or, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a certainement $n^2 \geqslant n(n-1)$, donc $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$ (cette dernière inégalité n'est évidemment valable que si $n \geqslant 2$), donc $S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ (on a isolé le premier terme de la somme pour pouvoir appliquer l'inégalité précédente). Or, la somme obtenue maintenant à droite de l'inégalité se calcule très bien à coups de décomposition en éléments simples et de somme télescopique : $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$. Finalement, on déduit de tous nos petits calculs que $S_n \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$. La suite croissante (S_n) étant majorée par 2, elle converge nécessairement.

Bien entendu, notre raisonnement ne nous permet pas de connaitre la limite de cette série, qu'on noterait $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, tout ce qu'on peut dire est que cette limite est inférieure ou égale à 2. En fait, on l'a déjà croisée quelque fois, et on sait qu'elle vaut $\frac{\pi^2}{6}$. Notons qu'on peut aussi démontrer la convergence de (S_n) à l'aide par exemple de suites adjacentes (c'était l'objet d'un exemple vu en cours il y a quelques mois), mais aucune des méthodes simples prouvant la convergence ne donnera en même temps la valeur de la somme.

Exemple : Un petit dernier avec alternance de signes dans le terme général : $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (pour $n \geqslant 1$). Le fait d'avoir des signes qui changent complique l'étude de la série puisque (S_n) ne sera pas croissante (ni décroissante). Regardons les premiers termes pour se faire une idée de ce qui va se passer : $S_1 = 1$, puis $S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ et $S_4 = S_3 - \frac{1}{4} = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. Si on va un peu plus loin et qu'on s'amuse à placer les différents termes de la suite, on soupçonne qu'elle va effectivement converger (vers une valeur se situant quelque part entre $\frac{1}{2}$ et 1) en oscillant autour de sa limite. Cette observation va nous pousser à séparer l'étude des termes d'indices pairs et impairs. Posons donc $v_n = S_{2n}$ et $w_n = S_{2n+1}$. La suite (v_n) est croissante : $v_{n+1} - v_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$. De même, (w_n) est décroissante : $w_{n+1} - w_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$. Comme de plus, leur différence $w_n - v_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}$ tend vers 0, les deux suites sont adjacentes, et convergent donc vers une limite commune, qui est également limite de la suite (S_n). On peut montrer par d'autres méthodes que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln(2)$ (si vous voulez savoir d'où peut bien sortir ce $\ln(2)$, écrivez donc le développement limité de $\ln(1+x)$ et posez $x = 1$, ça devrait vous éclairer).

Définition 3. Si la série $\sum u_n$ converge, le **reste d'indice** n de la série est le réel $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n$.

Proposition 1. Sous les hypothèses précédentes, la suite (R_n) converge vers 0.

Démonstration. En effet, comme les sommes partielles convergent vers la somme de la série, l'écart entre les deux tend vers 0. □

2 Théorèmes de convergence.

2.1 Séries à termes positifs.

La plupart des résultats de convergence que nous allons étudier ne s'appliquent en fait qu'à des séries dont tous les termes sont positifs. Comme on le verra dans un ou deux exemples, les séries dont les termes sont de signe variable sont nettement plus compliquées à étudier (et les séries complexes également). Quelques résultats de ce paragraphe sont toutefois généraux et s'appliquent à toutes les séries.

Proposition 2. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors le terme général (u_n) converge vers 0.

Démonstration. En effet, si la série converge, (S_n) converge vers la somme de la série, qu'on va par exemple noter S (notation standard pour une somme de série). Mais alors, (S_{n+1}) tend aussi vers S. Or, on a $u_n = S_{n+1} - S_n$, qui converge donc vers 0. □

Remarque 4. Attention, cette condition est nécessaire mais **pas** suffisante. La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, et pourtant, la limite de $\frac{1}{n}$ vaut bien 0. C'est une erreur extrêmement fréquente sur les copies, à éviter absolument car ça énerve énormément les correcteurs.

Exemple : Ce critère s'utilise surtout via sa contraposée : si le terme général ne tend **pas** vers 0, alors la série est divergente. Par exemple, la série de terme général $(-1)^n$ ne converge pas. On dit dans ce cas que la série est **grossièrement** divergente.

Proposition 3. L'ensemble E des séries convergentes est un espace vectoriel sur lequel l'application $\sum u_n \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est une application linéaire. Autrement dit :

- Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors leur somme $\sum(u_n + v_n)$ est convergente, et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \sum_{k=0}^{+\infty}(u_k + v_k)$.
- Si λ est un scalaire quelconque et $\sum u_n$ une série convergente, $\sum \lambda u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
- De plus, si $\sum z_n$ est une série à terme général complexe, $\sum z_n$ converge vers une somme S si et seulement si $\sum \text{Re }(z_n)$ et $\sum \text{Im }(z_n)$ sont deux séries convergentes, de sommes respectivement égales à Re (S) et Im (S).

Démonstration. C'est une application directe des propriétés de la limite. Montrons par exemple la première partie. Notons S_n, T_n et U_n les sommes partielles respectives des séries de terme général u_n, v_n et $u_n + v_n$. On a manifestement $U_n = S_n + T_n$. Si les deux suites S_n et T_n convergent, ce sera donc aussi le cas de U_n et sa limite est bien la somme des limites de S_n et de T_n. □

Remarque 5. Attention encore une fois à la rédaction : ce n'est pas parce qu'une série est convergente et qu'on peut découper la somme en deux morceaux que les deux morceaux en question forment également des séries convergentes. Il est donc préférable de ne travailler dans un premier temps qu'avec des sommes partielles.

Exemple : On a vu un peu plus haut que la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ convergeait vers $\ln(2)$ (enfin, on a prouvé qu'elle convergeait, et je vous ai affirmé que la limite valait $\ln(2)$). Autrement dit, on peut écrire une égalité du genre $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln(2)$. Imaginons qu'on conserve les mêmes termes, avec les mêmes signes, mais qu'on bouscule un peu l'ordre : on veut savoir si la somme $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$ converge (on alterne en permanence deux termes « positifs » de dénominateur impair et un terme « négatif » de dénominateur pair, en utilisant tous les dénominateurs à un moment ou à un autre, comme précédemment). Si cette nouvelle somme (qu'on peut décrire de façon théorique comme une série, bien entendu) converge, quelle sera sa limite ? Je sens l'incompréhension gagner vos petits cerveaux, vous avez tous envie de répondre « bah oui, ça converge vers ln(2), on vient de le dire, c'est quoi cette question triviale ? ». Eh bien, la question est peut-être triviale, mais la réponse beaucoup moins. En fait, cette nouvelle somme converge bel et bien, mais pas du tout vers ln(2), alors qu'on a gardé les mêmes termes en modifiant simplement l'ordre (elle tend vers $\frac{3}{2}\ln(2)$). C'est en fait pire que ça : à partir des mêmes termes (avec les mêmes signes), toujours en modifiant l'ordre, on peut créer d'autres séries qui convergent, mais pas nécessairement vers ln(2). On peut même créer des séries qui convergent vers n'importe quel réel fixé à l'avance ! Je sens vos vagues certitudes mathématiques vaciller, la somme n'est donc pas une opération commutative ? Si, bien sûr, mais la somme **de série**, qui est un mélange de calcul de somme et de limites, elle, est beaucoup plus compliquée. En fait, ce qui pose problème dans l'exemple ci-dessus, c'est qu'on ne peut pas séparer les termes positifs et les termes négatifs dans deux sommes distinctes et dire que notre série va converger vers la différence des deux, car ces deux sommes distinctes ne convergeraient pas (donc on aurait en gros un résultat qui vaudrait $+\infty - \infty$, belle forme indéterminée). Il faut retenir que les séries dont les termes sont de signes alternés, de façon générale, c'est très vilain.

Proposition 4. Si le terme général u_n de la série est positif, la série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Démonstration. En effet, la suite (S_n) est alors croissante. Elle est donc soit majorée et convergente, soit non majorée, auquel cas elle tend vers $+\infty$. □

Corollaire 1. Soient deux séries de termes généraux u_n et v_n vérifiant $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Démonstration. En effet, dans le premier cas on aura, en notant n_0 le rang à partir duquel les inégalités sont vérifiées, $\forall n \geqslant n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{k=n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{k=n} v_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$, donc les sommes partielles de terme général u_n sont majorées et la série correspondante converge. La deuxième propriété est similaire, en utilisant cette fois-ci que la série de terme général v_n est supérieure à une suite divergant vers $+\infty$, donc diverge elle aussi vers $+\infty$. □

Théorème 1. Comparaison série-intégrale.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs vérifiant les hypothèses suivantes :

- il existe une fonction f continue sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ telle que $u_n = f(n)$.
- la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

Alors la série $\sum u_n$ a la même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_a^n f(t)\ dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration. Même si nous n'avons pas étudié cette année la notion d'intégrale impropre (dont font parties les intégrales dont une des bornes est infinie), ce théorème relie fondamentalement la série $\sum u_n$ à l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$, dont l'existence est conditionnée à celle de la somme de la série. La démonstration est en fait assez facile. Pour simplifier les choses, on supposera que $a = 0$ (si ce n'est pas le cas, il suffit de n'étudier que le reste de la série obtenu en partant de $n = a$). La fonction f étant supposée décroissante, on peut affirmer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$. En intégrant cet encadrement entre k et $k+1$, on obtient $u_{k+1} = f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\ dt \leqslant f(k) = u_k$. On peut alors additionner ces encadrements pour k variant entre 0 et n pour trouver $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{n+1} \leqslant \int_0^{n+1} f(t)\ dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k$. Autrement dit, en notant $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, on aura $\displaystyle\int_0^{n+1} f(t)\ dt \leqslant S_n \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\ dt$ (l'inégalité de droite étant obtenue en décalant l'inégalité de gauche de l'encadrement précédent d'une unité). Si la suite (S_n) converge, ce sera donc le cas de $\displaystyle\int_0^{n+1} f(t)\ dt$ (tous les termes de l'encadrement correspondent à des suites croissantes). Réciproquement, la convergence de l'intégrale assure celle de la série via l'inégalité de droite. □

Exemple : La série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$ (pour $n \geqslant 2$) vérifie les hypothèses de ce théorème. Elle a donc la même nature que $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)}\ dt = [\ln(\ln(t))]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2))$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$, la série est divergente (c'est un cas particulier de ce qu'on appelle les séries de Bertrand).

Théorème 2. Utilisation de relations de comparaison.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$, alors les deux séries ont la même nature.
Si $u_n = O(v_n)$ (toujours pour des séries à termes positifs) et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (c'est a fortiori vrai si $u_n = o(v_n)$).

Démonstration. Par définition, si $u_n = O(v_n)$, $u_n \leqslant Mv_n$ à partir d'un certain rang, il suffit alors d'appliquer les résultats de comparaison vus plus haut. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$ d'où l'équivalence en utilisant le cas précédent. □

2.2 Séries à termes quelconques.

Définition 4. La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 5. Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Pour une série dont les termes sont réels, c'est assez facile : on note (v_n) la suite définie par $v_n = \max(u_n, 0)$ (qui ne contient donc que les termes positifs de la suite (u_n), les autres ayant été remplacés par 0) et (w_n) la suite définie par $w_n = -\min(u_n, 0)$ (qui garde cette fois-ci les termes négatifs, en changeant leur signe). On constate aisément que $0 \leqslant v_n \leqslant |u_n|$, le critère de comparaison précédent permet donc d'affirmer la convergence de la série $\sum v_n$. De même, $0 \leqslant w_n \leqslant |u_n|$, donc $\sum w_n$ converge également. Par linéarité, la série $\sum v_n - w_n$ est également convergente, et il s'agit exactement de la série $\sum u_n$. Si on travaille avec des complexes, on se contente de constater que les deux séries $\sum(\text{Re }(z_n))$ et $\sum(\text{Im }(z_n))$ sont absolument convergentes ($|\text{Re }(z_n)| \leqslant |z_n|$, et de même pour la partie imaginaire), donc convergentes, et on en déduit la convergence de $\sum z_n$. □

Remarque 6. Attention, la réciproque n'est pas vraie. Par exemple la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, dont on a vu qu'elle était convergente, n'est pas absolument convergente (cf la suite du cours, divergence de la série harmonique). On dit que c'est une série **semi-convergente**.

Définition 5. Une **série alternée** est une série dont le terme général est de la forme $(-1)^n a_n$, avec (a_n) une suite réelle positive.

Autrement dit, c'est une série dont les termes changent de signe en permanence.

Théorème 3. Critère spécial des séries alternées.
Soit $\sum(-1)^n a_n$ une série alternée telle que (a_n) soit décroissante et de limite nulle, alors $\sum u_n$ converge. De plus, le reste de la série est alors majoré : $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.

Démonstration. C'est exactement le cas de la série $\sum \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ étudiée en début de chapitre, et la démonstration générale est rigoureusement la même : on note $u_n = S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$, et $v_n = S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k$. La suite (u_n) est décroissante : $u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$, et la suite (v_n) est croissante (même calcul). Comme de plus $|u_n - v_n| = a_{2n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$, et les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes, ce qui prouve la convergence de (S_n) vers une limite S. Enfin, puisqu'on est en présence de suites adjacentes, on a toujours $v_n \leqslant S \leqslant u_n$, ce qui prouve que $|R_n| \leqslant |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}$ pour tout entier. □

Exemple : on cherche à étudier la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. Pas facile car les signes alternent mais la décroissance de la valeur absolue du terme général n'est pas du tout évidente. En fait on n'en a pas besoin si on connait ses développements limités : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Notre terme général est donc la somme de deux termes généraux de séries convergentes (le premier terme est celui d'une série qui est cette fois clairement alternée, le troisième avec le O converge absolument d'après le critère de Riemann que nous allons détailler plus loin) et du terme général de la série harmonique divergente. Notre série diverge donc.

3 Séries de référence.

Proposition 6. Séries télescopiques.

Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général peut s'écrire sous la forme $v_{n+1} - v_n$, alors la nature de cette série est la même que celle de la suite (v_n).

Démonstration. C'est trivial : $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$, qui a clairement la même nature que (v_n) (mais pas la même limite dans le cas où elles convergent, il y a un décalage de v_0). En fait, on peut aussi avoir des cas de télescopages entre plusieurs termes consécutifs de la série, pas nécessairement deux (on a déjà vu des exemples de ce type lors du calcul de sommes finies il y a quelques mois). □

Exemple : On cherche à déterminer la nature et la somme de la série de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Comme la série est à termes négatifs et que $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$, qui est le terme général d'une série convergente, notre série converge. Pour le calcul de la somme par télescopage, il est fortement conseillé d'écrire le télescopage avec des sommes partielles pour ne pas risquer de découper une série convergente en somme de deux séries divergentes : $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k) = \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) + \ln(n) + \ln(n+1) + \ln(2) + \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) - 2\ln(2) - 2\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) - 2\ln(n) = -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Cette expression ayant pour limite $-\ln(2)$ quand n tend vers $+\infty$, notre série est bien convergente, et $\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2)$.

Définition 6. Soit $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum q^n$ est appelée **série géométrique** de raison q.

Proposition 7. La série géométrique de raison q est convergente si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Démonstration. On sait calculer les sommes partielles depuis un certain temps : $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant les résultats sur les limites de suites géométriques, on constate la convergence de la série lorsque $|q| < 1$, vers la somme indiquée. □

Remarque 7. Ce résultat se généralise à d'autres séries, souvent désignées sous le nom de séries géométriques dérivées (vous comprendrez pourquoi quand on va faire le calcul de la somme partielle). Nous donnerons simplement le cas de la dérivée première (on peut aussi faire des dérivées secondes, tierces, sur le même principe), qui est d'ailleurs à la limite du programme (mais c'est bien pratique, vous pourrez donc l'utiliser dans les exercices).

Proposition 8. On appelle **série géométrique dérivée** de raison q la série de terme général kq^{k-1}. Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Démonstration. Pour prouver cette proposition, on va réellement utiliser un calcul de dérivée, en « transformant la série en fonction ». Posons donc $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ (ce qui correspond à la somme partielle de la série géométrique de raison x). Si on dérive cette fonction à partir de son expression sous forme de somme, on obtient $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, c'est-à-dire exactement la somme partielle de la série géométrique **dérivée** de raison x (d'où le nom de cette dernière). Or on sait par ailleurs que $f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, donc (via un sympathique calcul de dérivée de quotient) $f'(x) = \dfrac{-(n+1)x^n + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$. Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$, en utilisant le fait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} nx^n = 0$ (par croissance comparée) pour obtenir la convergence de la somme partielle vers la valeur voulue : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. On constate d'ailleurs que la formule obtenue est la dérivée (par rapport à la variable x) de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, ce qui permet si besoin de retrouver très facilement la formule. On aurait d'ailleurs de même, en dérivant une fois de plus, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$, et ainsi de suite. □

Remarque 8. On peut déduire du résultat précédent les valeurs d'autres sommes de séries. Par exemple, si $|q| < 1$, la série de terme général nq^n converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$. En effet, on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kq^k = q \times \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$, et on est ramené au cas de la série géométrique dérivée.

Proposition 9. La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x, et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.
Pour cette raison, cette série est souvent appelée **série exponentielle**.

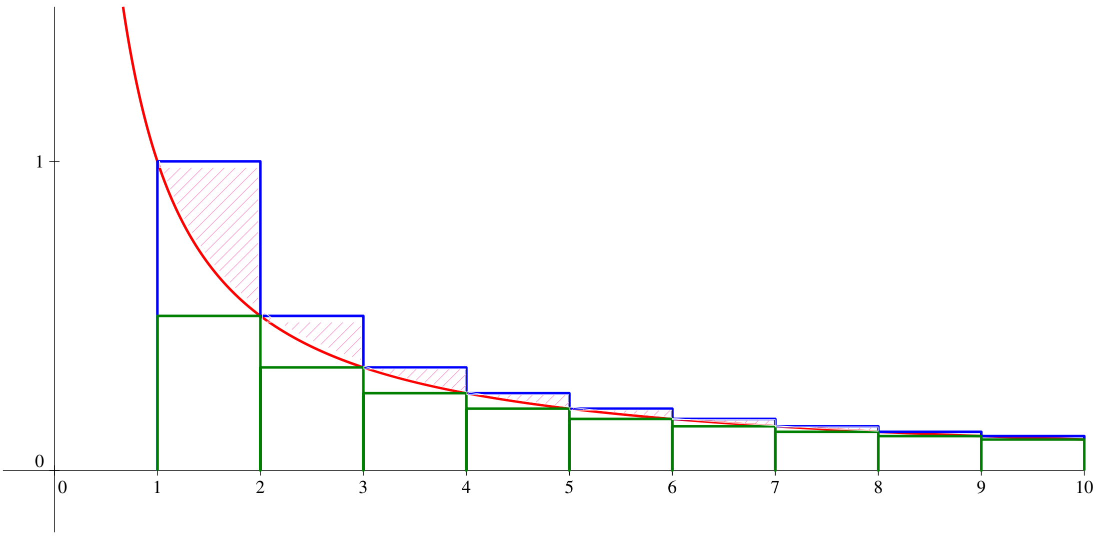
Démonstration. La formule découle bien sûr du développement de Taylor de la fonction exponentielle. Pour prouver correctement sa convergence, il faudrait appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange, ce que je vous laisse en exercice (ça vous fera réviser). $\square$

Exemple : Quand on choisit $x = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Définition 7. La série de terme général $\frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**.

Proposition 10. La série harmonique est divergente. Plus précisément, la somme partielle de cette série est équivalente à $\ln n$.

Démonstration. La divergence de cette série est une conséquence triviale du théorème de comparaison série-intégrale. Pour obtenir l'équivalent, on va faire un calcul un peu plus précis (qui est exactement celui de la démonstration du théorème en question) : si k est un entier naturel non nul, $\forall x \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$. En intégrant ces inégalités entre k et $k+1$, on obtient $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$, soit $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k}$ (seule l'intégrale du milieu est une « vraie » intégrale, les deux autres sont des intégrales de constantes). Gardons l'inégalité de droite et décalons l'indice dans celle de gauche pour obtenir l'encadrement $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$. En additionnant ces encadrements pout tous les entiers de 2 à n (on ne peut pas le faire pour $k = 1$ à cause du $k-1$ apparaissant dans le membre de gauche), on obtient alors $\int_2^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$ (les sommes d'intégrales se simplifiant en appliquant simplement la relation de Chasles), soit $\ln(n+1) - \ln 2 \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n)$. En notant $H_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$, on a donc $\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$. En divisant tout par $\ln n$, on en déduit $\frac{\ln(n+1) - \ln(2) + 1}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$. Le membre de droite a manifestement pour limite 1, quand n tend vers $+\infty$, et celui de gauche également, car $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$, donc $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}$, qui tend vers 1. Via le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$, ce qui signifie exactement que $H_n \sim \ln n$. Sur l'illustration ci-dessous, la courbe de la fonction inverse est en rouge, et on visualise bien l'encadrement $\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k}$ (rectangles en vert) $\leqslant \int_1^{10} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{k}$ (rectangles en bleu). En hachures rose super moches, on a une aire totale égale à $\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{k} - \ln(9)$, on verra un peu plus loin que si on continuait le schéma, cette aire aurait une limite finie.



□

Définition 8. On appelle **séries de Riemann** les séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

> **Théorème 4.** Critère de Riemann.
>
> Une série de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. C'est un exercice facile utilisant la comparaison série-intégrale. □

Remarque 9. Ainsi, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente puisque correspondant à $\alpha = 2$. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est aussi une série de Riemann, mais divergente puisqu'elle correspond à $\alpha = 1$. C'est en quelque sorte la « plus petite » série de Riemann qui ne converge pas.

Exemple : On peut aller plus loin qu'un simple équivalent pour la série harmonique et démontrer notamment que $\sum_{k=0}^{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est une constante appelée constante d'Euler-Mascheroni (pour information, $\gamma \simeq 0.577$, on n'en connait aucune expression simple et on ne sait même pas si elle est irrationnelle). Une démonstration possible : on pose $u_n = \ln(n) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$, et on s'intéresse à la série télescopique (de même nature que la suite (u_n)) $\sum u_n - u_{n-1} = \sum \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n} = \sum -\frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Or, $-\frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$, et on peut appliquer le critère d'équivalence pour en déduire la convergence de la série (les séries sont ici à termes négatifs) et donc de la suite (u_n).

Profitons de ce résultat pour obtenir par un joli calcul la somme de la série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ déjà croisée quelques fois depuis le début de ce chapitre. En notant $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (somme partielle de la série harmonique), on peut constater que $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2n} = H_{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n$. Or, si $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, alors $H_{2n} = \ln(2n) + \gamma + o(1)$, donc $H_{2n} - H_n = \ln(2n) - \ln(n) + o(1) = \ln(2) + o(1)$, ce qui revient exactement à dire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

4 Familles sommables.

4.1 Familles de réels positifs.

Nous allons tenter dans cette partie de cours de généraliser les résultats obtenus sur les séries numériques à des sommes (infinies) indexées par des ensembles plus compliqués que $\mathbb{N}$, et notamment par des ensembles n'admettant pas d'ordre naturel, ce qui empêche de voir le calcul de la somme comme un simple passage à la limite. On utilisera dans ce paragraphe quelques propriétés de l'ensemble $\overline{\mathbb{R}^+}$, obtenu en ajoutant à l'intervalle $[0, +\infty[$ une valeur égale à ∞, avec les règles de calcul déjà vues plus tôt dans l'année sur $\overline{\mathbb{R}}$: $\forall x \in [0, +\infty[$, $x + \infty = \infty$, et $\forall x \in [0, +\infty[$, $x \leqslant \infty$. On peut même prolonger la multiplication en imposant que $\forall x \neq 0$, $x \times \infty = \infty$, mais $0 \times \infty = 0$ (pour conserver le caractère absorbant de l'élément neutre additif). Dans cet ensemble, on dispose du résultats suivant (admis) :

Théorème 5. Tout sous-ensemble non vide de $\overline{\mathbb{R}^+}$ admet une borne supérieure.

Remarque 10. C'est en fait assez facile à prouver : si l'ensemble contient ∞, sa borne supérieure est égale à ∞. Sinon, soit l'ensemble est majoré et admet classiquement une borne supérieure finie, soit non et on prouve sans difficulté que sa borne supérieure est ∞. Notons même que l'ensemble vide admet dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ une borne supérieure égale à 0.

Définition 9. Soit I un ensemble quelconque et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels positifs, alors on appelle **somme de la famille** (x_i) la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ de l'ensemble $S = \left\{ \sum_{j \in J} x_j \mid J \subset I \text{ fini} \right\}$. On la note $\sum_{i \in I} x_i$. La famille (x_i) est une **famille sommable** de réels positifs si cette somme est finie.

Remarque 11. Si la famille n'est pas sommable, on notera tout de même $\sum_{i \in I} x_i = +\infty$.

Exemple : La famille (q) avec q variant dans l'ensemble des nombres rationnels appartenant à $]1, +\infty[$, n'est pas sommable. En effet, elle contient la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui ne peut pas être sommable puisqu'on sait bien que les sommes partielles de la série harmonique ne sont pas majorées.

Remarque 12. Si l'ensemble I est fini, la famille (x_i) est toujours sommable et sa somme est égale à la somme finie usuelle $\sum_{i \in I} x_i$. Si $I = \mathbb{N}$, la famille (x_n) est sommable si et seulement si la série de terme général x_n converge, et sa somme coïncide avec celle de cette série. Autrement dit, le concept de famille sommable ne représente qu'une généralisation de celui de la convergence des séries à termes positifs.

Démonstration. On va procéder par double implication. Supposons dans un premier temps que la série définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ converge vers un réel S. Si on considère un sous-ensemble J fini de $\mathbb{N}$, ce sous-ensemble admet un maximum n, et on peut alors écrire $\sum_{j \in J} x_j \leqslant \sum_{k=0}^{n} x_k \leqslant S$ (rappelons que tous les termes de chacunes des sommes sont des réels positifs), donc $\left\{ \sum_{j \in J} x_j \mid J \subset I \text{ fini} \right\}$ est majoré par S, ce qui prouve que la famille (x_i) est sommable et que sa somme T est inférieure ou égale à S (puisque S est un majorant de l'ensemble dont cette somme est borne supérieure). Réciproquement, supposons la famille (x_i) sommable, de somme égale à T, alors $\{0, 1, \dots, n\}$ étant un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, on a par définition de la sommabilité $\sum_{k=0}^{n} x_k \leqslant T$, donc la série (S_n) est majorée par T et converge donc vers une somme $S \leqslant T$. Finalement, on a bien équivalence entre les deux convergences, et égalité des sommes dans le cas de la convergence. □

Exemple : On souhaite prouver la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{a^p + a^q} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ pour tout réel $a > 1$. Pour cela, il va donc falloir réussir à majorer les sommes finies obtenues à partir de cette famille. Commençons par constater que $(a^{\frac{p}{2}} - a^{\frac{q}{2}})^2 = a^p + a^p - 2a^{\frac{p}{2}} a^{\frac{q}{2}} \geqslant 0$, donc $a^p + a^q \geqslant 2a^{\frac{p}{2}} a^{\frac{q}{2}}$, puis $\frac{1}{a^p + a^q} \leqslant \frac{1}{2a^{\frac{p}{2}} a^{\frac{q}{2}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^p \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^q$. Soit maintenant un sous-ensemble fini J de $\mathbb{N}^2$, il existe un entier N tel que $J \subset \{1, 2, \dots, N\}^2$ (il suffit de considérer les maximums sur chaque coordonnée du couple d'entiers, et poser pour N le plus grand des deux). On peut donc écrire $\sum_{(i,j) \in J} \frac{1}{a^p + a^q} \leqslant$
$\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^p \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^q = \frac{1}{2} \left(\sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^q \right)^2 \leqslant \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^n \right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{a}}} \right)^2 = \frac{a}{2(\sqrt{a} - 1)^2}$.
La famille est donc sommable, et on a même obtenu par la même occasion une majoration sur la valeur de sa somme.

Théorème 6. Théorème de sommation par paquets.

Pour toute partition $(I_k)_{k \in K}$ de l'ensemble I, $\sum_{i \in I} x_I = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est hors programme même si son principe est assez intuitif : on a simplement découpé la somme en morceaux disjoints. Quelques exemples de « découpages » classiques de sommes utilisant le principe de ce théorème :

- $\sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i + \sum_{i=1}^{+\infty} x_{-i}$
- $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i = \sum_{i=0}^{+\infty} x_{2i} + \sum_{i=0}^{+\infty} x_{2i+1}$

- $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} x_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} x_{i,j}$
- $\displaystyle\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} x_{n,p} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k} x_{i,k-i}$

□

Exemple : C'est plutôt un contre-exemple que nous allons donner pour commencer, pour montrer que le théorème de sommation par paquets ne peut pas fonctionner avec des sommes de nombres réels qui ne sont pas tous positifs. Considérons en effet $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n$, qui est classiquement une série divergente. Si on avait le droit d'effectuer une sommation par paquets, on pourrait utiliser la partition définie par les ensembles $\{2k, 2k+1\}_{k\in\mathbb{N}}$ pour obtenir que la somme précédente est nulle (sur chaque ensemble de la partition, on additionne un 1 et un -1, ce qui donne évidemment 0). Mais on pourrait aussi choisir la partition constituée de l'ensemble $I_0 = \{0\}$ et des ensembles $\{2k-1, 2k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$, et on obtiendrait cette fois-ci une somme égale à 1 (le premier ensemble ne contient qu'un terme égal à 1 mais tous les autres verraient un -1 s'additionner à un 1 pour donner 0). C'est un peu gênant.

Exemple : On peut en fait pratiquer la sommation par paquets même avec des familles qui ne sont pas sommables, le résultat sera simplement infini. Considérons ainsi la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{n^2+p^2}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}}$.
Comme $n^2+p^2 \leqslant (n+p)^2$, on peut écrire $\displaystyle\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{n^2+p^2} \geqslant \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{(n+p)^2} = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i+(n-i))^2}$ (ici, on a fait une sommation par paquets en regroupant tous les couples d'entiers ayant la même somme k dans un même paquet ; un tel couple d'entiers peut s'écrire $(i, k-i)$, avec i et $k-i$ tous les deux supérieurs ou égaux à 1 par hypothèse, et leur somme k peut prendre n'importe quelle valeur entière à partir de 2). Notre somme est donc minorée par $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k^2}$ qui est une série divergente (terme général équivalent à celui de la série harmonique). La famille étudiée n'est donc pas sommable.

Proposition 11. Règles de calcul sur les familles sommables.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda x_i + y_i) = \lambda\sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ (linéarité)
- si $\forall i \in I$, $x_i \leqslant y_i$, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$ (croissance)
- si $\varphi : J \to I$ est une application bijective, $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{\varphi(j)}$ (changement d'indices)
- $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x_{i,j}$ (théorème de Fubini)
- $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j = \left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right)$

Démonstration. Démontrons séparément chacune de ces propriétés :

- Supposons les deux familles sommables et notons S_x et S_y leurs sommes respectives. Soit $J \subset I$ un sous-ensemble fini, par définition de la sommabilité des familles, on aura alors $\displaystyle\sum_{i\in J}(\lambda x_i + y_i) = \lambda\sum_{i\in J} x_j + \sum_{i\in J} y_i \leqslant \lambda S_x + S_y$, ce qui prouve que la famille $(\lambda x_i + y_i)$ est sommable, et que sa somme S_λ vérifie $S_\lambda \leqslant \lambda S_x + S_y$. Réciproquement, fixons un $\varepsilon > 0$. La caractérisation de la borne supérieur nous assure alors l'existence d'un sous-ensemble fini J_1 de I tel que $\displaystyle\sum_{i\in J_1} x_i \geqslant S_x - \frac{\varepsilon}{\lambda}$. De même, il existe un sous-ensemble J_2 tel que $\displaystyle\sum_{i\in J_2} y_i \geqslant S_y - \varepsilon$. Si on pose $J = J_1 \cup J_2$ (qui est bien sûr toujours fini), on aura donc $\displaystyle\sum_{i\in J_1\cup J_2} \lambda x_i + y_i \geqslant \lambda S_x + S_y - 2\varepsilon$, ce qui prouve que $\lambda S_x + S_y - 2\varepsilon \leqslant S_\lambda$. Comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc $\lambda S_x + S_y \leqslant S_\lambda$, ce qui, combiné à l'inégalité déjà obtenue, prouve la formule souhaitée.

Dane le cas où une des deux familles (voire les deux) a une somme infinie, c'est encore plus rapide : si par exemple (x_i) n'est pas sommable, on peut trouver, pour tout réel positif A, un sous-ensemble fini J tel que $\displaystyle\sum_{i\in J} x_i \geqslant \frac{A}{\lambda}$, ce qui prouve que les sommes finies de la famille $(\lambda x_i + y_i)$ ne sont pas non plus majorées, et la famille n'est donc pas sommable.

- Comme toujours, ce genre de résultat découle de la positivité : la somme d'une famille de réels positifs est toujours positivie ou nulle, donc $\displaystyle\sum_{i\in I} y_i = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I}(y_i - x_i) \geqslant \sum_{i\in I} x_i$ en appliquant la linéarité qu'on vient juste de prouver.
- C'est intuitivement évident (les sommes sont les mêmes !), pour ne pas s'embêter avec une démonstration technique, on peut simplement appliquer la sommation par paquets : l'ensembles des singletons $\{\varphi(j)\}_{j\in J}$ est une partition de l'ensemble I, donc $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{\varphi(j)}$.
- C'est à nouveau une application du théorème de sommation par paquets : $I \times J$ peut être partitionné par les ensembles $\{i\} \times J$ pour i parcourant I, ou $I \times \{j\}$, pour j parcourant J.
- On applique directement le théorème de Fubini, puis la linéarité : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i y_j = \sum_{i\in I} x_i \sum_{j\in J} y_j$.

□

Exemple : Le théorème de Fubini qui permet d'inverser des sommes doubles « quelconques » est extrêmement utile pour simplifier des calculs autrement infaisables, il ne faut pas hésiter à s'en servir dès que possible. Par exemple, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = 1$. Notez en passant qu'avec les familles sommables, on ne s'embête pas à travailler avec des sommes partielles puisqu'on a le droit de traiter les sommes ayant une valeur infinie comme les autres.

Exemple : On souhaite calculer la somme (éventuellement infinie) $\displaystyle S = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{np(n+p-1)}$. On va pour cela procéder à une décomposition en éléments simples « classique » mais en procédant en deux temps. Considérons pour commencer p comme fixe (on indexera donc la somme extérieure par p quand on écrira S comme une somme double), alors on peut décomposer, en considérant n comme variable, $\displaystyle\frac{1}{n(n+p-1)} = \frac{1}{p-1} \times \frac{n+p-1-n}{n(n+p-1)} = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p-1}\right)$. Attention tout de même, cette décomposition n'est valable que pour $p \geqslant 2$. Pour $p = 1$, la somme intérieure est simplement égale à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on va donc l'isoler pour le reste du calcul. On peut donc écrire $\displaystyle S = \frac{\pi^2}{6} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p-1}$. Intéressons-nous à cette somme intérieure, mais attention, on va devoir manipuler des sommes partielles car ça ne converge pas du tout absolument : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p-1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=p}^{N+p-1} \frac{1}{n}$. Quitte à choisir N suffisamment grand, la somme se télescope pour laisser $\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{N+p-1} \frac{1}{n}$. La dernière somme peut être majorée (en valeur absolue) par $\sum_{n=N+1}^{N+p-1} \frac{1}{N+1} = \frac{p-1}{N+1}$, qui tend toujours vers 0 quand on fait tendre N vers $+\infty$ (la variable p étant fixée, bien sûr). Autrement dit, on a prouvé que la série de terme général $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p-1}$ convergeait quelle que soit la valeur de $p \geqslant 2$, vers $\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n}$. On peut enfin reprendre le calcul de la somme initiale : $S = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n}$. On va maintenant inverser la somme pour finir le calcul plus facilement : n prend des valeurs strictement inférieures à p, donc $S = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$.

4.2 Familles sommables dans $\mathbb{C}$.

Ce deuxième paragraphe recouvrira aussi le cas de familles sommables de réels potentiellement négatifs. Comme on va le voir tout de suite, on ne va pas faire dans le détail pour définir la sommabilité de ce genre de familles :

Définition 10. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ est **sommable** si la famille $(|x_i|)$ est une famille sommable de réels positifs. L'ensemble des familles sommables indexées par l'ensemble I est noté $l^1(I, \mathbb{C})$ (ou $l^1(I, \mathbb{R})$ si on se restreint à des familles sommables de nombres réels).

Remarque 13. On reconnait dans cette définition une notion proche de celle de série absolument convergente vue plus haut dans ce cours. Attention tout de même, on a vu dans le cours des cas de séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. Ces séries ne sont donc pas des familles sommables au sens que nous venons de définir. Par exemple, la famille $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'appartient pas à $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Proposition 12. Si la famille (x_i) est une famille sommable de nombres complexes, il existe un unique nombre complexe S tel que, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble J_ε fini de I tel que $J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \left| \sum_{i \in J} x_i - S \right| \leqslant \varepsilon$ (avec J lui aussi fini). Le nombre S est alors appelé somme de la famille (x_i) et noté comme d'habitude $\sum_{i \in I} x_I$.

Démonstration. On ne démontrera pas ce résultat technique (comme tous ceux qui vont suivre, d'ailleurs). L'idée est simplement la suivante : on obtient la somme d'une famille sommable en prenant une sorte de « limite » des sommes obtenues sur les sous-ensembles finis. Le critère de sommabilité assure qu'on obtiendra toujours la même valeur, quel que soit « l'ordre » qu'on impose sur le calcul de somme. En pratique, on prouvera la sommabilité en utilisant la définition (donc avec des modules, typiquement en majorant par des sommes bien connues, ou en découpant en sommes de séries classiques via le théorème de sommation par paquets), puis on utilisera sans se préocupper du fait qu'on a des nombres complexes ou des indices un peu bizarres les règles de calcul habituelles qu'on va rappeler ci-dessous. □

Remarque 14. Dans le cas d'une famille de nombres réels de signe quelconque, si on note (comme on l'a déjà fait pour la démonstration de la linéarité des sommes de séries) x_i^+ la partie positive de x_i (donc $x_i^+ = \max(x_i, 0)$), et x_i^- la partie négative ($x_i^- = -\min(x_i, 0)$), la famille (x_i) est sommable si et seulement les deux familles de réels **positifs** (x_i^+) et (x_i^-) sont sommables (au sens du paragraphe précédent), et dans ce cas, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^-$.

On peut effectuer un découpage similaire avec des familles de nombres complexes en séparant en quatre suites de réels positifs (deux pour la partie réelle, deux pour la partie imaginaire), et notre famille sera sommable si et seulement si ces quatre familles sont des familles sommables de réels positifs.

Exemple : La famille $\left(\dfrac{\cos(p+q)\sin(p-q)}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est une famille sommable de réels puisque $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{|\cos(p+q)\sin(p-q)|}{p^2q^2} \leqslant \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}$, qui converge. Notez qu'en termes de rédaction, vous pouvez toujours écrire des « sommes infinies » dès le début des calculs, puisque par convention le résultat vaudra simplement $+\infty$ si la famille n'est pas sommable. Attention toutefois à ne le faire que sur les valeurs absolues (ou modules), ce serait un abus sur des familles de réels (ou de complexes) quelconques.

Proposition 13. Règles de calcul sur les familles sommables.

- L'ensemble $l^1(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et le calul de somme est une forme linéaire sur $l^1(\mathbb{K})$.
  Autrement dit, la linéarité reste valable : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\sum_{i\in I}(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$.
- Si (x_i), $(y_i) \in l^1(\mathbb{R})^2$ et $\forall i \in I$, $x_i \leqslant y_i$, alors $\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$ (croissance).
- Si $(x_i) \in l^1(\mathbb{K})$ et $\varphi : J \to I$ est une application bijective, alors $(x_{\varphi(j)}) \in l^1(\mathbb{K})$ et $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{\varphi(j)}$ (changement d'indices).
- Le théorème de sommation par paquets reste vrai pour les familles sommables de nombres complexes.
- Le théorème de Fubini reste vrai pour les familles sommables de nombres complexes (sous réserve de sommabilité des familles (x_i) et (y_j)) :
  $$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x_{i,j}.$$
- Le résultat sur les familles produits reste également vrai :
  $$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j = \left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right).$$

Démonstration. Les démonstrations seraient en fait les mêmes que pour les familles sommables de réels positifs. On ne les (re)fera pas, et ce d'autant moins qu'on n'a déjà pas démontré la première version du théorème de sommation par paquets, qui est un peu le résultat central de cette partie de chapitre. $\square$

Exemple : La famille de nombres réels $\left(\dfrac{(-1)^n}{nk(k+1)}\right)_{1\leqslant n\leqslant k}$ est une famille sommable. Ici, les notations ne sont pas très pratiques (il est sous-entendu que k et n sont des entiers naturels), on aimerait pouvoir dire directement qu'on cherche à calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}$, mais on ne peut pas écrire cette somme sans avoir prouvé son existence. En pratique, on fera souvent l'abus de notation consistant à écrire les calculs de sommes infinies « sous réserve de sommabilité » avant d'avoir prouvé ladite sommabilité. Ici, prouvons-là donc avant d'aller plus loin (une fois les valeurs absolues prises, on peut travailler avec des sommes infinies, quitte à avoir une somme égale à $+\infty$ en bout de calcul) : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, qui converge effectivement (série de Riemann). On peut maintenant effectuer exactement le même calcul sans valeur absolue pour obtenir $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{nk(k+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=-\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{12}=-\frac{\pi^2}{12}$.

Exemple : On souhaite calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$. Commençons par prouver la sommabilité en prenant les modules : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{2^n}$, qui converge (série géométrique dérivée). Effectuons maintenant le même « échange d'indices » sur la somme de départ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n-1}e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Vous n'avez bien sûr pas oublié que la somme des racines n-èmes de l'unité était nulle. Ici, il nous en manque une, en l'occurence la plus simple, celle qui est égale à 1, donc notre somme est égale à $\displaystyle-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$.

Définition 11. Soient (u_n) et (v_n) les termes généraux de deux séries absolument convergentes. On appelle **produit de Cauchy** des deux séries la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\displaystyle p_n=\sum_{i+j=n}u_iv_j=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}$.

Proposition 14. Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est toujours une famille sommable.
De plus, avec les notations précédentes, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}p_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\times\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$.

Démonstration. Il s'agit en fait d'une simple application du théorème de sommation par paquets : en notant $I_n=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2\mid i+j=n\}$, les ensembles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une partition de $\mathbb{N}^2$, d'où la sommabilité de la famille (p_n) et la formule annoncée. Intuitivement, il s'agit simplement de « développer » le produit de sommes infinies de la façon suivante : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n_0}^{+\infty} v_n = \underbrace{u_0v_0}_{i+j=0} + \underbrace{u_0v_1 + u_1v_0}_{i+j=1} + \underbrace{u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0}_{i+j=2} + \dots$. Autrement dit, on somme tous les produits « en diagonale » dans $\mathbb{N}^2$. $\square$

Remarque 15. Attention, il est hors de question d'appliquer ce résultat lorsque les deux séries ne sont pas **absolument** convergentes. Posons par exemple $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. La série de terme général u_n converge (série alternée) mais pas absolument puisque $|u_n| \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, terme général d'une série de Riemann divergente. On peut alors vérifier que le produit de Cauchy des deux séries ne converge pas : $|p_n| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$. Si on pose $f(x) = (x+1)(n+1-x) = n+1+nx-x^2$, la fonction f est dérivable, de dérivée $f'(x) = n-2x$ qui s'annule pour $x = \dfrac{n}{2}$, et admet donc pour maximum $f\left(\dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{(n+2)^2}{4}$. On peut alors minorer facilement p_n (on majore chaque dénominateur par la racine carrée du maximum qu'on vient de calculer, puisque ces dénominateurs sont de la forme $\sqrt{f(k)}$) : $p_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2}$, qui a le mauvais goût de ne pas du tout tendre vers 0. La série $\sum p_n$ diverge donc grossièrement.

Exemple : Si $q \in]-1,1[$, on sait que la série géométrique de terme général q^n converge vers $\dfrac{1}{1-q}$. Si on applique la propriété précédente à $u_n = v_n = x^n$, on obtient le résultat suivant : $\dfrac{1}{(1-q)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(n+1)q^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$. Un moyen particulièrement élégant de retrouver la formule des séries géométriques dérivées.

Exemple : On sait que la série exponentielle de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ est toujours absolument convergente, de somme e^x. Si on calcule le produit de Cauchy des séries de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ et $\dfrac{y^n}{n!}$, on obtient $e^x \times e^y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}$. En gros, on vient de prouver que la relation fondamentale vérifiée par la fonction exponentielle est une espèce de généralisation du binôme de Newton à une somme infinie.

5 Mathémagiques.

Cette dernière partie, complètement hors-programme, est fortement inspirée d'un article du grand mathématicien Pierre Cartier (né en 1932), intitulé *Mathemagics (a tribute to L.Euler and R.Feynman)*, et facilement téléchargeable en ligne pour les plus motivés d'entre vous (une bonne partie de l'article dépasse quand même nettement votre domaine de compétences, et accessoirement, ça vous fera bosser un peu votre anglais, il n'y a pas de traduction disponible à ma connaissance). On ne présente plus Leonhard Euler en cours de maths, mais pour ceux qui ne le sauraient pas, Richard Feynman est l'un des plus grands physiciens du 20ème siècle (et fût notamment un très grand vulgarisateur). Vous demanderez à Mme Galliani de vous expliquer rapidement les diagrammes de Feynman, je suis sûr qu'elle se fera un plaisir de vous répondre.

5.1 Des calculs dignes d'un élève de MPSI !

Nous allons effectuer dans les paragraphes qui suivent des séries de calculs pour le moins douteux, notamment en manipulant joyeusement des séries divergentes comme si elles convergeaient, pour obtenir des résultats assez suprenants. La partie suivante essaiera de donner quelques pistes pour justifier la cohérence de tels calculs, mais il est évident qu'ils n'auraient aucun sens dans le cadre décrit dans le cours, et qu'il est hors de question de faire figurer sur une copie !

5.1.1 Sommes de séries divergentes.

Considérons la série de terme général $(-1)^n$. Elle diverge bien sûr grossièrement puisque $(-1)^n$ ne tend pas vraiment vers 0. Pourtant, si on supposait qu'elle puisse admettre une somme que nous noterons $S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$, quelle serait la valeur la plus logique à donner à S ? Laissons la parole à notre taupin peu rigoureux, qui va faire le brillant calcul suivant (il écrit deux fois la somme S, en insérant un 0 au début de la deuxième somme et en décalant tous les termes suivants, puis il additionne les deux lignes) :

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S & = & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & \dots \\ +S & = & 0 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & \dots \\ \hline 2S & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & \dots \end{array}$$

Finalement, $2S = 1$, soit $S = \frac{1}{2}$. Logique, non ? Tout ce qu'on a utilisé, c'est le droit d'additionner deux séries (propriété de linéarité), et le fait qu'on ne change pas la somme en décalant les termes et en ajoutant un 0 au début (ce qu'on appellera pour la suite la propriété de « décalabilité »). Sur sa lancée, notre élève zélé décide de tenter une bidouille à sa façon sur la série $\sum(-1)^n n$, qui diverge tout autant (si ce n'est plus !) que la précédente. Il note T la somme de cette série divergente, et effectue le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} T & = & 0 & - & 1 & + & 2 & - & 3 & + & 4 & - & 5 & + & 6 & \dots \\ +T & = & 0 & + & 0 & - & 1 & + & 2 & - & 3 & + & 4 & - & 5 & \dots \\ \hline 2T & = & 0 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & \dots \end{array}$$

On reconnait sur la dernière ligne l'opposée de la série précédente, on conclut donc que $2T = -S = -\frac{1}{2}$, donc $T = -\frac{1}{4}$. Encore un calcul d'une logique imparable, qui utilise les mêmes propriétés que précédemment (linéarité et « décalabilité » de la somme). Il est maintenant temps de tenter un troisième calcul encore plus impressionnant que les deux autres réunis. On va tenter de calculer la somme de la série $\sum n$, qui semble vraiment très très divergente. N'ayons pas peur et notons U la somme de cette série, puis effectuons le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} U & = & 0 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & \dots \\ +T & = & 0 & - & 1 & + & 2 & - & 3 & + & 4 & - & 5 & + & 6 & \dots \\ \hline U+T & = & 0 & + & 0 & + & 4 & + & 0 & + & 8 & + & 0 & + & 12 & \dots \end{array}$$

On obtient cette fois-ci la relation $U + T = 4U$ (quitte à supprimer les 0 qui ne changeront de toute façon pas la valeur de la somme), soit $3U = T = -\frac{1}{4}$. On conclut au surprenant résultat suivant : la somme de tous les entiers vaut $-\frac{1}{12}$. Bon, n'allez pas trop le répéter, on risquerait de vous prendre pour encore plus mauvais en maths que vous ne l'êtes vraiment. Contentons-nous de signaler que, pour obtenir ces résultats absurdes, on n'a utilisé à nouveau que les deux propriétés suivantes : la linéarité de la somme de série, et la « décalabilité ». Ces deux propriétés sont évidemment vraies pour des séries convergentes, mais peut-on les prolonger de façon cohérente à d'autres séries ? Nous reviendrons là-dessus plus loin. En attendant, continuons à faire des calculs bizarres pour obtenir des résultats rigolos (et parfois même corrects !). Il n'y a pas que les sommes dans la vie, on peut manipuler bien d'autres choses de façon peu rigoureuse.

5.1.2 Manipulations douteuses de polynômes.

Intéressons-nous au polynôme $S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k$. Ah oui, tiens, ce n'est pas tout à fait un vrai polynôme. Bon, pas grave, on va faire comme si de rien n'était. Effectuons alors une manipulation qui ressemble étrangement à ce que nous avons fait à plusieurs reprises dans le paragraphe précédent :

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S(t) & = & 1 & - & t & + & t^2 & - & t^3 & + & t^4 & - & t^5 & \dots \\ +tS(t) & = & 0 & + & t & - & t^2 & + & t^3 & - & t^4 & + & t^5 & \dots \\ \hline (1+t)S(t) & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & \dots \end{array}$$

Bref, $S(t) = \dfrac{1}{1+t}$. En fait, cette relation est rigoureusement exacte, à une condition, c'est qu'on ait $|t| < 1$ (on calcule alors une somme de série géométrique convergente). Poussons un peu le bouchon en considérant que ce n'est pas loin de marcher pour $t = 1$, ce qui donnerait $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = \dfrac{1}{2}$. Tiens, ça ne vous rappelle pas quelque chose ? Généralisons un peu (volontairement, je ne mets pas d'indices sous la somme, puisqu'on va appliquer un calcul qui serait correct avec des sommes finies à des sommes de séries), pour tout entier naturel p, on peut écrire : $\sum (-1)^k t^k k^p = \sum k^p (-t)^k$. Remarquons maintenant la chose suivante : si on pose $f(t) = (-t)^n$, alors $tf'(t) = t \times (-n) \times (-t)^{n-1} = n(-t)^n$. En notant φ l'application linéaire qui, à une fonction f de la variable t, associe $tf'(t)$, on peut alors écrire que $k^p(-t)^k = \varphi^p((-t)^n)$ (la puissance étant à comprendre au sens d'une composée d'applications linéaires, comme d'habitude). Enchainons avec le sublime calcul suivant, en utilisant la linéarité sur une somme infinie (après tout, ça marche quand la somme est finie, y a pas de raison de se priver de généraliser) : $\sum_{k=0}^{+\infty} k^p(-t)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^p((-t)^k) = \varphi^p\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k\right) = \varphi^p\left(\dfrac{1}{1+t}\right)$. Lorsque p est égal à 0, on retrouve le résultat du calcul précédent : $\sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \dfrac{1}{1+t}$. Appliquons une première fois l'application φ : la dérivée de $\dfrac{1}{1+t}$ vaut $-\dfrac{1}{(1+t)^2}$, donc $\varphi\left(\dfrac{1}{1+t}\right) = -\dfrac{t}{(1+t)^2}$, ce qui revient à dire que $\sum_{k=0}^{+\infty} k(-1)^k t^k = -\dfrac{t}{(1+t)^2}$. Encore une fois, cette formule est rigoureusement exacte pour toutes les valeurs de t appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$. Si on se permet de prendre $t = 1$ dans cette relation, on retrouve $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k = -\dfrac{1}{4}$, soit la formule obtenue pour la somme T dans le paragraphe précédent. On peut continuer : pour $p = 2$, on calcule $t \times \left(\dfrac{-t}{(1+t)^2}\right)' = t \times \dfrac{-(1+t)^2 + 2t(1+t)}{(1+t)^4} = \dfrac{t(t-1)}{(1+t)^3}$. On peut donc écrire $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k^2 t^k = \dfrac{t(t-1)}{(1+t)^3}$, ce qui donne, en prenant $t = 1$, l'intéressante relation $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k^2 = 0$ (mais oui). Je vous laisse vérifier si vous le souhaitez que, pour $p = 3$, on obtiendrait de même $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k^3 = \frac{1}{8}$, et on peut continuer encore longtemps comme ça. Passons plutôt à autre chose.

5.1.3 Un peu d'intégrales.

Puisque multiplier un peu tout et n'importe quoi par $(-1)^k$ donne des résultats rigolos, pourquoi ne pas introduire des choses qui divergent encore plus rapidement comme des factorielles ? On va désormais tenter de donner une valeur à la somme suivante : $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k!$. Après tout, là, on a quelque chose qui diverge quand même bien violemment. Pas grave, on va s'en sortir, il « suffit » pour cela de savoir qu'on peut écrire $k! = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^k \, dt$ (c'est même à peu près à votre portée, ça se prouve par une récurrence assez tranquille, en admettant qu'on a le droit de faire une IPP sur une intégrale avec une borne infinie). Il ne reste plus alors qu'à utiliser la linéarité de l'intégrale (quoi ? une somme infinie ? ah désolé je n'avais pas vu) : $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k! = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t}(-t)^k \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} \, dt$. Bon, on ne sait pas calculer cette dernière intégrale, mais on sait très bien prouver mathématiquement qu'elle existe bel et bien (attendez l'an prochain pour faire cette preuve). Elle vaut environ 0.596 (merci Wolfram, ça ne s'exprime pas très simplement, on a besoin d'une primitive de $\frac{e^x}{x}$ pour pouvoir donner une valeur exacte).

5.1.4 Une généralisation osée des relations coefficients-racines.

Dans ce dernier paragraphe consacré à des calculs absurdes, nous allons obtenir des relations tout à fait censées, et même rigoureusement exactes, à l'aide de calculs qui le sont nettement moins. Vous connaissez tous les relations coefficients-racines sur les polynômes ? On va les exprimer de façon légèrement différente de ce qu'on a vu en cours, puis appliquer le résultat à une fonction qui n'a rien d'un polynôme, et le résultat sera vraiment magique. Soit donc un polynôme P unitaire de degré n ayant n racines notées α_1, …, α_n (pas d'arnaque pour l'instant, c'est un vrai polynôme). On peut donc écrire $P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$. On peut également écrire ce même polynôme sous forme développée $P = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, avec les relations que vous connaissez bien : $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -c_{n-1}$ etc. On va effectuer un calcul différent en s'intéressant à la dérivée logarithmique du polynôme P, à savoir $\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n}$. Allons plus loin : $\frac{P'(x)}{P(x)} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i} \times \frac{1}{1-\frac{x}{\alpha_i}} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)^k$ (bon, ok, ce serait mieux que le quotient apparaissant dans la deuxième somme soit de valeur absolue plus petite que 1, mais faisons comme si on n'avait rien vu). Autrement dit (et quitte à inverser les sommes), $\frac{P'(x)}{P(x)} = -\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{x^k}{\alpha_i^{k+1}}$.

Notons, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\gamma_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i^k}$, on peut alors écrire notre relation sous la forme (en multipliant tout par x pour avoir les mêmes puissances dans la somme de droite) :

$$xP'(x) + P(x) \times \sum_{k=1}^{+\infty}\gamma_k x^k = 0$$

.

On peut identifier les termes de même degré dans cette équation, en écrivant P' et P sous forme développée : $c_1 x + 2c_2 x^2 + \cdots + nc_n x^n + (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n)(\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_n x^n) = 0$. On suppose pour simplifier que $c_0 = 1$, et en prenant les termes par puissances croissantes, on trouve les relations :

- $c_1 + \gamma_1 = 0$, soit $\gamma_1 = -c_1$.
- $2c_2 + \gamma_2 + c_1\gamma_1 = 0$, soit $\gamma_2 = c_1^2 - 2c_2$.
- $3c_3 + \gamma_3 + c_1\gamma_2 + c_2\gamma_1 = 0$, soit $\gamma_3 = -c_1^3 + 3c_1c_2 - 3c_3$.
- $4c_4 + \gamma_4 + c_1\gamma_3 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_1 = 0$, soit $\gamma_4 = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 - 4c_4 + 2c_2^2$.

Appliquons donc ces superbes résultats à un drôle de polynôme : $P(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Quoi, vous n'êtes pas contents ? Pourtant, vous savez tous que $\dfrac{\sin(x)}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + \dots$, oublions le fait que ça part un peu jusqu'à l'infini. On aura donc $c_0 = 1$ (tout va bien), $c_1 = 0$ (et plus généralement $c_{2k+1} = 0$ pour tout entier k), $c_2 = -\dfrac{1}{6}$, $c_4 = \dfrac{1}{120}$ etc. Quelles sont les racines du « polynôme » P ? Facile, ce sont celles de la fonction sinus, sauf 0, autrement dit, tous les multiples pairs de π (attention, il y en a des négatives, ce n'est pas évident de numéroter). Avec les notations précédentes, on peut par exemple calculer $\gamma_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(-k\pi)^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Si on en croit les relations ci-dessus, $\gamma_2 = c_1^2 - 2c_2 = \dfrac{1}{3}$, soit en faisant passer les constantes à droite, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Eh ben oui, c'est vrai, ça marche ! Si ça c'est pas une méthode qui tue pour démontrer ce résultat difficile, je ne sais pas ce qu'il vous faut. Ne nous arrêtons pas en si bon chemin, regardons ce que vaut $\gamma_4 = \dfrac{2}{\pi^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$. En appliquant encore les relations, $\gamma_4 = 0 - 0 + 0 - \dfrac{4}{120} + \dfrac{2}{36} = -\dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{18} = \dfrac{2}{90}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, ce qui est également tout à fait exact. On pourrait bien sûr généraliser à toutes les sommes de la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$, pour tous les entiers p qui sont pairs. Par contre, ça ne marche pas du tout quand p est impair, puisqu'on a alors trivialement $\gamma_p = 0$ (les racines négatives compensent les positives). Ce n'est pas un hasard, puisque ces valeurs ne peuvent de fait pas s'exprimer simplement. On va revenir un peu dessus un peu plus bas.

5.2 D'autres types de convergence pour les séries numériques.

Revenons un peu désormais à l'aspect théorique caché derrière ces drôles de calculs. Nous avons expliqué plus haut dans ce cours que les séries convergentes formaient un espace vectoriel E et que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ \sum u_n & \mapsto & S \end{array} \right.$ est une application linéaire, qui est de plus « décalable » au sens vu précédemment. La question qu'on peut se poser est simple : peut-on prolonger cette application φ à un espace E' plus gros que E de façon à ce qu'elle conserve la linéarité et la « décalabilité » et qu'elle coïncide bien sûr avec l'application φ pour toutes les séries convergentes ? Eh bien, la réponse est oui. Attention tout de même, on ne va non plus obtenir tout ce qu'on voudrait, et notamment on ne justifiera jamais la somme U de la première partie par un calcul de convergence « décalable », comme le prouve le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcccccccccccccccl} U & = & 0 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & \dots \\ -2U & = & 0 & + & 0 & - & 2 & - & 4 & - & 6 & - & 8 & - & 10 & \dots \\ +U & = & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & \dots \\ \hline 0 & = & 0 & + & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & \dots \end{array}$$

La relation $0 = 1$, quand même, on a beau aller chercher aussi loin qu'on veut, ça pose problème. Pas grave, on va quand même voir deux nouvelles définitions de la convergence de séries qui étendent la définition classique vue dans ce cours, et qui permettent de comprendre un peu mieux pourquoi les valeurs aberrantes calculées pour S, T et U ont une certaine logique. Commençons par quelque chose que vous pouvez vraiment bien comprendre :

Définition 12. Une suite réelle (u_n) est **convergente au sens de Cesaro** si la suite auxiliaire définie par $v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$ converge.

Autrement dit, (u_n) converge si la moyenne de ses sommes partielles converge. Un résultat classique sur les suites affirme qu'une suite convergente (au sens classique) est toujours convergente au sens de Cesaro (avec la même limite), ce qui prouve que cette nouvelle notion de convergence étend la notion classique (ce résultat constitue une partie de l'exercice 20 de la feuille d'exercices numéro 9). Il est assez facile de créer des exemples de suites qui convergent au sens de Cesaro, mais pas au sens usuel. Par exemple, $u_n = (-1)^n$ tend vers 0 au sens de Cesaro.

Essayons d'appliquer cette définition à nos différentes séries (attention, il s'agit bien ici de faire la moyenne des sommes partielles, et pas des termes généraux) : pour $\sum(-1)^k$, on calcule $S_0 = 1$, $S_1 = 1 - 1 = 0$, $S_2 = 1$, $S_3 = 0$ etc. Autrement dit, $\dfrac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1} = \dfrac{1}{2}$ si n est impair, et $\dfrac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1} = \dfrac{\frac{n}{2}+1}{n+1}$ si n est pair. Ces moyennes tendent vers $\dfrac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouve la convergence au sens de Cesaro de notre série vers $\dfrac{1}{2}$. Tentons de faire la même chose pour $\sum(-1)^k k$. On calcule donc $T_0 = 0$, $T_1 = -1$, $T_2 = 1$, $T_3 = -2$, $T_4 = 2$ etc. On va cette fois-ci obtenir alternativement des sommes partielles égales à 0 (si n est pair), et à $-\dfrac{n+1}{2}$ si n est impair. Ce n'est pas bon du tout, puisqu'il n'y a pas de limite unique quand n tend vers $+\infty$. Tentons alors une nouvelle définition :

Définition 13. Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour tout réel x pour lequel cette somme a un sens, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Si f est définie au voisinage de 1 (mais pas en 1, sinon la série convergerait au sens usuel du terme), et si f admet une limite l quand x tend vers 1, on dit que la série $\sum u_n$ converge au sens d'Abel vers l.

En fait, la fonction f est presque toujours définie sur $]-1, 1[$ (c'est notamment toujours le cas si (u_n) est bornée), et beaucoup de séries divergentes convergent au sens d'Abel. C'est par exemple le cas de notre série (T_n) : on pose alors $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k(-x)^k = \frac{-x}{(1+x)^2}$ si $|x| < 1$ (c'est une série géométrique dérivée tout ce qu'il y a de plus classique). De plus, f admet bel et bien une limite en 1, égale à $-\dfrac{1}{4}$, ce qui justifie (au sens d'Abel) la valeur obtenue pour T. Il ne faut pas rêver, on n'obtiendra pas U de la même façon, car cette convergence vérifie le critère de « décalabilité ». Pour tenter de trouver une explication pour cette dernière valeur, on va rester dans le domaine des prolongements de fonction, mais en passant dans le domaine complexe :

Définition 14. La **fonction** ζ de Riemann est définie par $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ (la lettre grecque ζ est un « dzeta », l'équivalent de notre z).

Cette fonction est définie tout à fait rigoureusement et correctement à la condition que $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ (la variable s étant ici un nombre complexe). En particulier, on notera que $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$;

$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Toutes les valeurs de la fonction ζ pour les entiers pairs sont bien connues depuis longtemps, et peuvent s'exprimer à l'aide des puissances paires de π et de nombres appelés nombres de Bernoulli qui sont très classiques en théorie des nombres. Curieusement, les valeurs pour les entiers impairs ne s'expriment pas du tout aussi simplement, et on sait même très peu de choses sur elles. On a par exemple simplement réussi à démontrer que $\zeta(3)$ était un nombre irrationnel en 1977. Quelques progrès ont été effectués depuis puisqu'on sait désormais qu'une infinité des valeurs prises par la fonction ζ pour les entiers impairs sont irrationnelles, mais on ne sait pas lesquelles (on soupçonne qu'elles le sont toutes) ! La fonction ζ est par ailleurs fondamentale pour de nombreux problèmes mathématiques, et intervient notamment de façon centrale dans l'étude des propriétés des nombres premiers. Sans chercher à rentrer dans les détails (si vous êtes vraiment motivés, un simple coup d'oeil à la page Wikipedia consacrée à cette fonction devrait vous faire très peur), citons simplement le plus célèbre problème posé par cette fonction, qui reste un problème ouvert à l'heure actuelle (si vous arrivez à démontrer cette conjecture, un million de dollars pour vous) :

Théorème 7. Hypothèse de Riemann.

Tous les zéros complexes non triviaux de la fonction ζ ont une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

J'ai énoncé le résultat sous forme de théorème, mais j'insiste, ce n'en est pas un, mais une simple conjecture. On connait des centaines de zéros non triviaux (les zéros triviaux sont les entiers négatifs pairs) de la fonction qui vérifient tous ce critère (et bien sûr aucun qui ne le vérifie pas). Je ne peux malheureusement pas vous expliquer beaucoup plus de choses sur cette fonction, si ce n'est qu'on peut la prolonger de façon unique (sous certaines conditions) en une fonction définie sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, et que ce prolongement vérifie en particulier (en gardant la même notation pour la fonction prolongée) que $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, ce qui reviendrait à dire que $\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = -\frac{1}{2}$; et surtout que $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$, ce qui signifie que $\sum_{k=1}^{+\infty} k = -\frac{1}{12}$. La fonction prendra aussi, naturellement, des valeurs pour les autres entiers négatifs, ce qui donne par exemple $\zeta(-3) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 = \frac{1}{120}$. Allez, un dernier calcul absurde pour finir en beauté :

Pour changer, on souhaite désormais calculer un **produit** infini très divergent, à savoir $1 \times 2 \times 3 \times \cdots = \prod_{k=1}^{+\infty} k$, ce qu'on va très logiquement noter $\infty!$. L'astuce pour le calcul de ce produit est de passer sous forme exponentielle : $\infty! = e^{\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k)}$. Or, un calcul tout à fait banal nous permet de constater que $\zeta'(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} -\ln(k)e^{-s\ln(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{\ln(k)}{k^s}$. En particulier, $\zeta'(0) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k)$. Ce qui tombe franchement bien, c'est que les innombrables relations faisant intervenir la fonction ζ permettent de prouver que $\zeta'(0)$ est en fait égal à $-\frac{1}{2}\ln(2\pi)$. On en déduit alors que $\infty! = e^{\frac{1}{2}\ln(2\pi)} = \sqrt{2\pi}$. Je crois qu'il est temps de clore ce chapitre sur ce résultat particulièrement fascinant.