Chapitre 20 : Matrices reloaded

MPSI Lycée Camille Jullian

24 avril 2023

La Matrice est universelle. Elle est omniprésente.
Elle est avec nous ici, en ce moment même. Tu la vois
chaque fois que tu regardes par la fenêtre, ou lorsque tu allumes la télévision.

Morpheus

Dans une soirée, une matrice propose à
une matrice inversible de danser avec elle :
« Ah non, désolée je ne reste pas, je suis de passage ! »

Il est temps pour ce troisième chapitre d'algèbre linéaire de l'année de faire le lien entre les espaces vectoriels et le calcul matriciel, qui constitue un puissant outil d'étude, notamment pour les applications linéaires. À tel point d'ailleurs qu'une grande partie de votre programme d'algèbre de deuxième année sera consacrée à la diagonalisation de matrices et à ses applications. Pour cette année, nous nous contenterons de constater qu'une application linéaire entre espaces de dimension finie peut être représentée par une matrice, et que le calcul matriciel (puissances de matrices notamment) s'interprète simplement dans ce cadre.

Objectifs du chapitre :

- maîtriser les différentes techniques de calcul du rang d'une matrice.
- comprendre ce que représente la matrice d'une application linéaire dans une base donnée, et être capable de reconstituer une telle matrice à l'aide de matrices de passage ou de calculs d'images de vecteurs.

1 Matrices d'applications linéaires.

1.1 Définitions.

L'idée derrière la définition de la matrice représentative d'une application linéaire est toute bête, elle consiste à comprendre qu'on n'a besoin que d'un nombre fini d'informations pour caractériser entièrement l'application en question. Supposons ainsi que $f : E \to F$ est une application linéaire entre un espace vectoriel E de dimension n et un autre espace vectoriel F de dimension p (le fait que les dimensions soient finies est par contre essentiel). On a déjà vu qu'une telle application linéaire était déterminée par l'image des vecteurs d'une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ quelconque de l'espace E (on peut reconstituer l'image de n'importe quel autre vecteur de E par linéarité). Chacune de ces images peut elle-même être décrite dans l'espace F à l'aide de p coordonnées (en exprimant $f(e_1)$, $f(e_2)$, ..., $f(e_n)$ dans une base fixée à l'avance de l'espace F), donc de p nombres réels. En prenant « un nombre réel » comme unité d'information, on a donc besoin de $n \times p$ informations pour décrire entièrement l'application f. Mieux, ces $n \times p$ nombres vont naturellement se répartir en « n groupes de p nombres » (les coordonnées des images de chacun des n vecteurs de la base de E), ce qui rend assez naturelle la représentation de ces nombres sous forme de matrice. Il faut toutefois avoir bien conscience que les nombres qu'on va mettre dans notre matrice dépendent non seulement de l'application f, mais aussi du choix de la base de E et du choix de la base de F. Il n'y a donc pas une seule matrice représentant « naturellement » l'application f, mais une matrice pour chaque couple de bases possibles des deux espaces vectoriels E et F. L'un des enjeux des calculs présentés dans ce chapitre est de comprendre les liens entre les différentes matrices obtenues quand on change ces bases, et de commencer à saisir qu'il existera des choix de bases « plus malins » que d'autres, dans lesquelles la matrice sera plus simple et donc plus maniable si on a besoin de faire des calculs avec (notamment des calculs de puissances). C'est en fait exactement l'objet de la **diagonalisation** que vous étudierez en détail l'an prochain (il s'agit, comme vous l'auriez deviné tout seuls, de trouver des bases dans lesquelles notre matrice va être diagonale).

Définition 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. En considérant une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E, la **matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** est la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est composée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $u_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, alors $M_{i,j} = \lambda_i$.

Exemple : la définition peut paraitre compliquée mais en pratique c'est tout bête, on écrit **en colonnes** les coordonnées des différents vecteurs de la famille. Bien entendu, la matrice obtenue dépendra du choix de la base dans laquelle on va calculer ces coordonnées, mais en pratique on prendra très souvent la base canonique. Par exemple, si on considère la famille $\mathcal{F} = ((1, -1, 2), (2, 0, 1))$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base canonique est simplement la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. De même, si on considère la famille de polynômes $\mathcal{F} = (X^2 - X + 1, 2X + 3, 3X^2 - 2)$, elle a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ (attention à bien mettre les coordonnées dans le bon ordre, rappelons que la base canonique est $(1, X, X^2)$ dans cet ordre !).

Définition 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F. La **matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** est la matrice de la famille $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{C}$. On la note $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (4x - 3y + z, -2x + y - 5z)$, la matrice de f dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. En effet, les vecteurs de la base canonique de E sont les trois vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, on a donc calculé les trois images $f(1, 0, 0) = (4, -2)$, $f(0, 1, 0) = (-3, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (1, -5)$ et on a recopié ces vecteurs dans les trois colonnes de la matrice. Alternativement, on peut aussi directement recopier « en ligne » les coefficients se trouvant devant les coordonnées x, y et z dans l'expression de $f(x, y, z)$, mais il faut toujours faire très attention à écrire la matrice « dans le bon sens » et à ne pas la confondre avec sa transposée.

Remarque 1. Si f est un endomorphisme, on a besoin de deux bases du même espace vectoriel, et on prendra très souvent $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, on notera simplement la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ dans ce cas.

Exemple : Prenons une application définie sur un espace vectoriel un peu plus pénible. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on définit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = AM - MA$. On veut calculer la matrice de f dans la base canonique (même base au départ et à l'arrivée ici puisqu'il s'agit d'un endomorphisme). Pour simplifier les choses, posons carrément $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et calculons $AM = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c-a & d-b \end{pmatrix}$, $MA = \begin{pmatrix} a-b & 2a+b \\ c-d & 2c+d \end{pmatrix}$ et donc $f(M) = \begin{pmatrix} b+2c & 2d-2a \\ d-a & -b-2c \end{pmatrix}$. En particulier, les images des quatre matrices formant la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont les suivantes : $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Très bien, mais comment fait-on pour créer une matrice avec tout ça ? Eh bien, on prend une matrice quatre lignes quatre colonnes (c'est normal, on travaille dans un espace vectoriel qui est de dimension 4), et on recopie dans chacune des colonnes de cette matrice les quatre coefficients de chaque image calculée ci-dessus (comme s'il s'agissait d'un vecteur et non d'une matrice). On obtient ainsi la matrice représentative $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et de F, et u un vecteur quelconque de E. En notant $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice-**colonne** de ces coordonnées ; en notant de même $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ la matrice-colonne des coordonnées de son image $f(u)$ dans la base $\mathcal{C}$, on a $Y = MX$, où M est la matrice représentant f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Démonstration. En effet, par définition, $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ (en notant $(e_1, \dots, e_n)$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}$), et par définition de la matrice M, on a $f(e_i) = \sum_{j=1}^{p} m_{ji} f_j$ (attention à l'ordre des indices, on note évidemment $(f_1, \dots, f_p)$ les vecteurs de $\mathcal{C}$). On a donc $f(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{p} m_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i m_{ji} \right) f_j$. Autrement dit, les coefficients de la matrice-colonne Y sont donnés par $y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i m_{ji}$. Or, l'unique terme de la j-ème ligne de la matrice colonne MX vaut précisément $\sum_{i=1}^{n} m_{ji} x_i$, ce qui prouve l'égalité demandée. $\square$

Cette propriété dit en fait tout simplement que, pour calculer l'image d'un vecteur par une application f à l'aide de la matrice de cette application, il suffit de le multiplier par cette matrice, à condition d'écrire toutes les coordonnées **en colonnes**. Vous aurez maintenant compris que, dans tout ce chapitre, cette écriture des coordonnées en colonnes sera systématique.

Proposition 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, et M la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors la matrice de λf dans ces mêmes bases est λM.

De même, si $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$, et M, N sont leurs matrices respectives (dans les mêmes bases), la matrice de $f+g$ est $M+N$.

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = NM$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la propriété précédente : $f(X) = MX$ et $g(X) = NX$, $\lambda f(X) = \lambda MX$, $f(X) + g(X) = MX + NX = (M+N)X$ et, lorsque cela a un sens, $g \circ f(X) = g(MX) = NMX$. □

Remarque 2. Il faut bien sûr faire attention pour la dernière de ces propriétés à prendre des bases cohérentes dans les différents espaces, mais également à bien effectuer le produit matriciel dans le bon sens quand le produit MN existe également.

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $(x,y,z) \mapsto (x-y, 2x+z)$, et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $(x,y) \mapsto (x+y, 3x-y, -x+2y)$. Les matrices respectives de ces deux applications linéaires dans les bases canoniques sont $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $NM = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on peut en déduire que $g \circ f(x,y,z) = (3x - y + z, x - 3y - z, 3x + y + 2z)$. Il est bien évidemment essentiel de multiplier les matrices dans le bon sens pour que leur produit corresponde à la matrice de la composée. C'est particulièrement important dans le cas où f et g sont deux endomorphismes d'un même espace vectoriel, cas où on peut effectuer le produit dans les deux sens (l'un d'eux correspondra à la matrice de $g \circ f$ et l'autre à celle de $f \circ g$).

Remarque 3. On peut donc constater que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array} \right.$ constitue un isomorphisme d'espaces vectoriels, quels que soient les choix de bases des espaces E et F.

Proposition 3. Un endomorphisme est bijectif si et seulement si sa matrice M dans une base $\mathcal{B}$ est inversible. Dans ce cas, la matrice de f^{-1} dans cette même base est M^{-1}.

Démonstration. C'est une application immédiate du dernier point de la proposition précédente : $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$, donc en notant N la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$, $MN = I$ (la matrice représentative de l'application id, tant qu'on utilise la même base au départ et à l'arrivée, est toujours égale à la matrice identité, d'où d'ailleurs le nom de cette dernière), ce qui signifie exactement que $N = M^{-1}$. □

Définition 3. On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque 4. L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} GL(E) & \to & GL_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array} \right.$ constitue un isomorphisme de groupes de $(GL(E), \circ)$ vers $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$.

Exemple : Une autre application essentielle de la propriété sur les matrices de composées d'applications linéaires est qu'on peut calculer la matrice des « puissances » d'un endomorphisme f^n (rappelons que cette notation désigne en fait une composée de f par elle-même n fois) en élevant simplement à la puissance n la matrice de l'application (ce qui justifie d'ailleurs la notation !). C'est un moyen particulièrement pratique de prouver par exemple qu'un endomorphisme est une projection ou une symétrie : on calcule sa matrice M dans une base de E (n'importe laquelle !), et on vérifie que $M^2 = I$ (pour une symétrie) ou que $M^2 = M$ (pour une projection).

Prenons par exemple $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$, sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Il suffit de vérifier que $M^2 = I_2$ pour constater que f est un projecteur. Allons un peu plus loin : f est la projection sur $\mathrm{Vect}((1,1))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((1,-1))$ (calculs évidents). La famille $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (les deux vecteurs ne sont manifestement pas proportionnels), et comme par définition $f(1,1) = (1,1)$ et $f(1,-1) = (0,0)$, la matrice de f dans cette nouvelle base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En fait, il est facile de comprendre que toute matrice de projection dans une base **adaptée** (c'est-à-dire constituée de vecteurs appartenant tous au noyau ou à l'image de la projection) sera diagonale, avec uniquement des 1 et des 0 sur la diagonale. C'est notre premier exemple de diagonalisation d'application linéaire ! De même, toute symétrie aura une matrice diagonale constituée de 1 et de -1 dans une bases adaptée (constituée de vecteurs appartenant à $\ker(f - \mathrm{id})$ ou à $\ker(f + \mathrm{id})$).

1.2 Changement de base.

Il ne nous reste plus qu'à comprendre une chose fondamentale : comment déterminer la matrice de f dans une autre base $\mathcal{B}'$ si on la connait dans une base $\mathcal{B}$.

Définition 4. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un même espace vectoriel E, la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. On la note souvent $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Remarque 5. On obtient donc la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ en notant en colonnes les coordonnées des différents vecteurs de $\mathcal{B}'$, exprimés dans la base $\mathcal{B}$. En pratique, on manipulera souvent des matrices de passage où la base de départ $\mathcal{B}$ est simplement la base canonique de l'espace E (souvent notée *can* dans ce genre de cas). Par exemple, la famille $\mathcal{B} = ((1,1),(2,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (les deux vecteurs qui la constituent ne sont pas proportionnels), et la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$ est la matrice $P_{can,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 4. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors P est une matrice inversible, et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ est P^{-1}.

Remarque 6. Plus généralement, une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E en est une base si et seulement si la matrice de $\mathcal{F}$ dans une base $\mathcal{B}$ est inversible. C'est une méthode qu'on peut bien sûr utiliser pour prouver qu'une famille de vecteurs est une base.

Démonstration. La matrice P peut être vue différemment : il s'agit de la matrice de l'application identité dans les bases $\mathcal{B}'$ (au départ) et $\mathcal{B}$ (à l'arrivée). En effet, les colonnes de P contiennent exactement les coordonnées des vecteurs e'_j (qui sont évidemment leurs propres images par l'application identité) dans la base $\mathcal{B}$. Si on note Q la matrice de cette même application identité dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (qui est aussi la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$), le produit des deux matrices représentera l'application identité dans la base $\mathcal{B}'$, au départ comme à l'arrivée. Mais cette dernière matrice est évidemment la matrice I, donc $QP = I$, ou encore $Q = P^{-1}$. $\square$

Proposition 5. Soit u un vecteur appartenant à E, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne de ses coordonnées dans une base $\mathcal{B}$ (on reprend les notations du paragraphe précédent), et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne de ses coordonnées dans une seconde base $\mathcal{B}'$. Alors $X = PX'$ (ou $X' = P^{-1}X$), où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Démonstration. Explicitons les hypothèses utiles : $u = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j$ (en gardant les notations utilisées plus haut pour les vecteurs des deux bases), et $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$, donc $u = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i$. Par unicité de la décomposition dans une base, on peut en déduire que $x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j$, soit exactement $X = PX'$. Il faut bien faire attention au sens assez contre-intuitif de la relation énoncée dans cette propriété (on exprime en fait les coordonnées dans l'« ancienne » base en fonction des coordonnées dans la « nouvelle » base, alors que souvent on préfèrerait le contraire). Obtenir X' en fonction de X nécessitera en pratique de calculer un inverse, celui de la matrice de passage. $\square$

Théorème 1. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Supposons qu'on dispose des éléments suivants :

- $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E ($\mathcal{B}$ est l'« ancienne » base et $\mathcal{B}'$ la « nouvelle »).
- $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux bases de F.
- P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
- Q est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$.
- M est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (autrement dit, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$).
- M' est la matrice de cette même application f, mais dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ (donc $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$).

Toutes ces matrices sont alors reliées par la relation fondamentale : $M' = Q^{-1}MP$.

Remarque 7. Cette formule est connue sous le nom de « formule de changement de bases pour les matrices d'applications linéaires » puisqu'elle permet en pratique de modifier les bases qu'on utilise pour construire la matrice de l'application f. Pour cela, on « change la base de départ » en multipliant à droite par la matrice de passage P, et on « change la base d'arrivée » en multipliant à gauche par **l'inverse** de la matrice de passage Q. Cette formule est extrêmement souvent utilisée en pratique, par exemple quand on fait de la diagonalisation (dans ce cas, les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont en général les bases canoniques des espaces E et F, et les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ sont soigneusement choisies pour que la matrice M' devienne diagonale). Un cas particulier essentiel de cette formule se produit quand f est un endomorphisme, et que la base de départ et la base d'arrivée sont identiques. On va d'ailleurs écrire explicitement ce cas qui est en pratique celui que vous exploiterez en permanence.

Théorème 2. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\,\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Démonstration. Sans expliciter les calculs, on peut exploiter assez simplement les résultats précédents. Soit X' la matrice-colonne des coordonnées d'un vecteur $u \in E$ dans la base $\mathcal{B}'$ (il est essentiel de partir ici de la nouvelle base et pas de l'ancienne), alors, d'après les propriétés énoncées précédemment :

- PX est la matrice des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$
- MPX représente la matrice des coordonnées de $f(u)$, toujours dans la base $\mathcal{B}$
- $Q^{-1}MPX$ est la matrice de $f(u)$, mais dans la base $\mathcal{B}'$

Or, on sait par ailleurs que ces mêmes coordonnées (celles de $f(u)$ dans $\mathcal{B}'$) sont calculées par la formule $M'X$. On en déduit donc qu'on a toujours $Q^{-1}MPX = M'X$, ce qui suffit à affirmer que $Q^{-1}MP = M'$ (les deux matrices représentent la même application linéaire dans les mêmes bases, elles sont nécessairement égales). □

Définition 5. Deux matrices M et N appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ sont **équivalentes** s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $N = Q^{-1}MP$.

Deux matrices M et N appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $N = P^{-1}MP$.

Remarque 8. Deux matrices sont donc semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme d'un ev de dimension finie E dans deux bases différentes. Deux matrices (pas forcément carrées !) sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire entre ev de dimension finie avec un choix de bases différent au départ comme à l'arrivée. On verra plus loin que la relation d'équivalence sur les matrices donne en fait beaucoup moins d'informations que celle de similitude.

Proposition 6. La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La relation d'équivalence est une relation d'équivalence (encore heureux !) sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Chacune des relations est réflexive : $M = I_nMI_n$ ou $M = I_pMI_n$ selon le cas. Elle est symétrique également de façon évidente : si $N = Q^{-1}MP$, alors $QNP^{-1} = M$ (chacune des deux matrices P et Q étant supposée inversible), de même pour la similitude. Enfin, la transitivité ne pose pas non plus de problème (on ne fait la preuve que pour l'équivalence) : si $N = Q^{-1}MP$ et $Z = S^{-1}NR$, alors $Z = S^{-1}Q^{-1}MPR = (QS)^{-1}M(PR)$, avec bien sûr les produits QS et PR qui sont inversibles, ce qui prouve que Z est équivalente à M. □

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice dans la base canonique $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, et notons $\mathcal{B} = ((1,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$. Vérifions que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$: si $(x,y,z) = a(1,1,-1) + b(1,0,-1) + c(1,-1,0)$, alors $a - c = y$ et $-a - b = z$, donc $-b - c = y + z$. Comme par ailleurs $a + b + c = x$, on trouve en additionnant $a = x + y + z$, puis $c = a - y = x + z$, et $b = -a - z = -x - y - 2z$. Autrement dit, la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{C}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$: $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On peut d'ailleurs s'en rendre compte autrement, en calculant directement les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ par l'application f : $f(1,1,-1) = (1,1,-1)$; $f(1,0,-1) = (2,0,-2) = 2(1,0,-1)$ et $f(1,-1,0) = (3,-3,0)$, ce qui explique que la matrice soit effectivement diagonale. Nous venons en fait d'effectuer sans le dire notre première diagonalisation de matrices, mais vous attendrez l'an prochain pour en apprendre (beaucoup) plus sur ce sujet.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x,y,z) = (2y-z, -x+3y-z, -2x+4y-z)$. La matrice M de cette application dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est bien entendu $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
Si on calcule M^2, on se rend compte que $M^2 = M$. Ceci prouve que $f \circ f = f$, et donc que f est une projection. Déterminons ses éléments caractéristiques : le noyau de f est obtenu en résolvant le système $\begin{cases} & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & 4y & - & z & = & 0 \end{cases}$. La première équation donne immédiatement $z = 2y$, si on remplace dans les deux autres on a alors les conditions $-x + y = 0$ et $-2x + 2y = 0$, qui sont manifestement équivalentes. On se contentera donc de dire que $x = y$, donc $\ker(f) = \text{Vect}((1,1,2))$. Le théorème du rang nous assure alors que Im (f) est de dimension 2. On peut en obtenir une base en calculant comme d'habitude les images des vecteurs de la base canonique (l'une des trois sera inutile) : Im $(f) = \text{Vect}((0,-1,-2),(2,3,4)(-1,-1,-1))$, ou pour simplifier les choses Im $(f) = \text{Vect}((0,1,2),(1,1,1))$. On sait que l'image et le noyau d'un projecteur sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires, donc la famille $\mathcal{B} = ((0,1,2),(1,1,1),(1,1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$? Pas le moindre calcul à faire pour la déterminer ici ! En effet, en notant e_1, e_2 et e_3 les vecteurs constituant cette base, on sait déjà que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ (les vecteurs appartenant à l'image d'un projecteur sont invariants), et $f(e_3) = 0$ (celui-ci est dans le noyau), donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3 Un petit aperçu sur la diagonalisation.

Les définitions que nous nous apprêtons à donner ne sont officiellement pas au programme de première année. Elles peuvent par ailleurs être adaptées en dimension infinie sans aucun difficulté, même si nous nous conterons d'exemples en dimension finie (l'étude des valeurs propres est extrêmement différent en dimension infinie de ce que vous apprendrez à faire l'an prochain dans le cadre de la dimension finie).

Définition 6. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. La valeur $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur non nul $u \in E$ tel que $f(u) = \lambda u$. Un tel vecteur u est alors appelé **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ. On appelle **spectre** d'un endomorphisme l'ensemble de ses valeurs propres.

Remarque 9. Les valeurs propres de f sont donc les valeurs pour lesquelles $\ker(f - \lambda\,\text{id}) \neq \{0\}$, autrement dit celles pour lesquelles $f - \lambda\,\text{id}$ n'est pas un automorphisme. Une autre façon de voir les choses : en notant M la matrice représentative de f dans une base quelconque, λ est valeur propre de f si et seulement si $M - \lambda I_n$ n'est pas une matrice inversible. En pratique, c'est en cherchant ces matrices non inversibles qu'on trouve les valeurs propres de f, puis les vecteurs propres correspondants.

Définition 7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **endomorphisme canoniquement associé à** M l'application $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ vérifiant $\text{Mat}_{can}(f) = M$. Les **valeurs propres**, **vecteurs propres** et **spectre** de la matrice M sont alors ceux de l'application f.

Exemple : On considère l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z) = (-x+3y+3z, 3x-y-3z, -3x+3y+5z)$. Notons M la matrice représentative de f dans la base canonique : $M =$

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Cherchons les valeurs propres de f (et de M) en déterminant les valeurs de λ pour lesquelles $M - \lambda I_3$ n'est pas une matrice inversible. Pour cela, on va simplement regarder si un système homogène ayant pour matrice $M - \lambda I_3$ admet une solution unique : $\left\{\begin{array}{ccccccc} (-1-\lambda)x & + & 3y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & - & (1+\lambda)y & - & 3z & = & 0 \\ -3x & + & 3y & + & (5-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$. L'addition des deux premières lignes donne $(2-\lambda)x + (2-\lambda)y = 0$. On peut déjà constater que la système ne sera pas de Cramer si $\lambda = 2$ (il ne restera que deux équations pour trois inconnues), qui est donc une première valeur propre de f. Supposons désormais $\lambda \neq 0$, pour pouvoir simplifier et affirmer que $y = -x$. On peut alors réécrire les deux équations restantes sous la forme $3z - (4+\lambda)x = (5-\lambda)z - 6x = 0$. Ces deux équations ne peuvent être proportionnelles que si $3(5-\lambda) = 6(4+\lambda)$, donc si $-9 = 9\lambda$, soit $\lambda = -1$. Les deux seules valeurs propres possibles pour f sont donc $\lambda = 2$ et $\lambda = -1$.

Cherchons maintenant les éventuels vecteurs propres correspondants. Un vecteur u est vecteur propre de f pour la valeur propre 2 si $f(u) = 2u$, donc, en posant $u = (x, y, z)$, si $\left\{\begin{array}{ccccccc} -x & + & 3y & + & 3z & = & 2x \\ 3x & - & y & - & 3z & = & 2y \\ -3x & + & 3y & + & 5z & = & 2z \end{array}\right.$. Les trois équations sont équivalentes à l'unique condition $-x + y + z = 0$, donc $\ker(f - 2\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$. Effectons le même type de raisonnement pour la valeur propre -1 : $u(x,y,z)$ vérifie $f(u) = -u$ si $\left\{\begin{array}{ccccccc} & & 3y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & & & - & 3z & = & 0 \\ -3x & + & 3y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right.$ (on a directement simplifié les équations), donc si $x = z$ et $y = -z$ (la dernière équation est alors automatiquement vérifiée). Autrement dit, $\ker(f + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1,-1,1))$.

Il est facile de constater que la famille $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,0,1),(1,-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par construction, la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$, on a par ailleurs $D = P^{-1}MP$, ce qui permet par exemple de calculer facilement les puissances de la matrice M via la formule classique $M^n = PD^nP^{-1}$ (cela nécessite tout de même le calcul de l'inverse de la matrice de passage).

Définition 8. Un endomorphisme f est **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. Une matrice M est diagonalisable si l'endomorphisme canoniquement associé à M est diagonalisable.

Remarque 10. Une matrice est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E uniquement constitué de vecteurs propres. Vous étudierez l'an prochain des conditions permettant d'assurer la diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice, mais on peut déjà citer un critère facile : si elle admet n valeurs propres distinctes (où n est la dimension de l'espace E), alors f (ou M) est nécessairement diagonalisable (en effet, la famille constituée par n vecteurs propres associés à ces n valeurs propres distinctes sera toujours libre, donc une base de E).

2 Outils supplémentaires d'analyse matricielle.

2.1 Noyau, image d'une matrice.

Comme on vient de le faire dans le paragraphe précédent, l'identification entre une matrice et son application linéaire canoniquement associée permet d'étendre aux matrices le vocabulaire classique concernant les morphismes.

Définition 9. Si $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ l'application linéaire canoniquement associée à f est l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ dont la matrice dans les bases canoniques est égale à M. On notera $f = \hat{M}$ par souci de commodité.

Définition 10. Le **noyau** et l'**image** d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont ceux de son application linéaire canoniquement associée $\hat{M}$. On les notera $\ker(M)$ et $\mathrm{Im}\ (M)$.

Remarque 11. On peut bien sûr calculer purement matriciellement le noyau d'une matrice, mais cela revient exactement à résoudre le même système que pour une application linéaire. L'image d'une matrice correspond au sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par ses colonnes. Bien sûr, les théorèmes classiques sur les applications linéaires s'adaptent aux matrices. Par exemple, une matrice carrée M est inversible si et seulement $\ker(M) = \{0\}$, si et seulement si $\mathrm{Im}\ (M) = \mathbb{K}^n$.

2.2 Rang d'une matrice.

Définition 11. Le **rang d'une matrice** $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le rang de la famille constituée des vecteurs-colonnes de la matrice M (coordonnées prises par exemple dans la base canonique).

Remarque 12. Autrement dit, le rang de M est le rang de l'application linéaire $\hat{M}$. Plus généralement, toute matrice représentant une application linéaire (quel que soit le choix des bases) aura le même rang que cette applciation linéaire.

Proposition 7. Le rang d'une matrice est toujours le même que celui de sa transposée.

Démonstration. Ce n'est pas évident à démontrer, nous l'admettrons (en fait cela découle de la caractérisation du rang donnée un peu plus loin). Notons une conséquence évidente : si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(M) \leqslant \min(n, p)$. □

Proposition 8. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang n si et seulement si elle est inversible.

Démonstration. En effet, M est de rang n si l'application linéaire associée est de rang n, donc bijective. □

Proposition 9. Le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice.

Démonstration. C'est assez immédiat si on songe que le rang représente la dimension de l'image de l'application linéaire associée. Un échange de colonnes échange deux images sans rien changer à sa dimension. Un produit par une constante non nulle d'une colonne ne modifie sûrement pas l'espace engendré par le vecteur correspondant. Et remplacer dans une famille génératrice un vecteur par une combinaison linéaire de lui-même et d'autres vecteurs de la famille ne modifie pas non plus la dimension de l'espace vectoriel engendré. Il est plus délicat de comprendre pourquoi le rang n'est pas modifié par opérations sur les lignes, mais cela découle du fait qu'une matrice a toujours le même rang que sa transposée. □

Exemple : On peut donc calculer le rang en appliquant une sorte de pivot de Gauss partiel à notre matrice, jusqu'à la transformer en matrice diagonale (dont le rang sera évident). En pratique, on se contente souvent de mélanger opérations sur les lignes et les colonnes jusqu'à obtenir une matrice dont le rang est immédiat. Ainsi, $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ en effectuant les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_4$ et $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_4$.

Théorème 3. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si $M = QJ_rP$, où P et Q sont deux matrices inversibles, et

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, avec r fois 1 et $n - r$ fois 0 sur la diagonale.

Démonstration. C'est en fait facile à prouver. Soit f l'application associée à M dans la base canonique. Puisque $\text{rg}(f) = r$, son noyau est de dimension $n - r$. On peut construire une base de E (théorème de la base incomplète) de la forme $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$, où $(e_{r+1}, \dots, e_n) \in \ker(f)^{n-r}$. On sait alors (démonstration du théorème du rang) que $f_{|\,\text{Vect}(e_1,\dots,e_r)}$ est un isomorphisme sur Im (f). En particulier, $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une famille libre de E, qu'on peut compléter en base. Dans ces deux bases, l'application f a par construction pour matrice J_r. En notant P et Q les matrices de passage idoines (de la base canonique vers la première base pour P, de la deuxième base vers la base canonique pour Q), les formules de changement de base assurent que $M = QJ_rP$. □

Corollaire 1. Deux matrices de même taille sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Deux matrices carrées semblables ont nécessairement le même rang (mais la réciproque est fausse !).

Proposition 10. Deux matrices semblables ont nécessairement la même trace.

Démonstration. C'est en fait une conséquence immédiate du fait que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$. Si deux matrices M et N sont semblables, alors $M = P^{-1}NP$, donc $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}((P^{-1}N)P) = \mathrm{Tr}(PP^{-1}N) = \mathrm{Tr}(N)$. Cette conservation de la trace par similitude est une propriété très utile pour vérifier certains calculs. Par exemple, quand on essaie de diagonaliser une matrice, on sait dès le départ que la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité si elle apparaissent plusieurs fois sur la diagonale de la matrice diagonale semblable à M) doit être égale à la trace de la matrice M. □

Définition 12. La **trace** d'un endomorphisme est la trace de sa matrice représentative dans n'importe quelle base.

Remarque 13. En effet, d'après ce qui précède, cette valeur ne dépend pas de la base choisie. La trace définit ainsi une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

2.3 Calcul matriciel par bloc, matrices extraites.

Définition 13. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, un **découpage par blocs** de la matrice M consiste à écrire $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où A, B, C et D sont elle-mêmes des matrices de tailles cohérentes : $A \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,p-r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-q,r}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-q,p-r}(\mathbb{K})$.

Proposition 11. Si $N \in \mathcal{M}_{p,z}(\mathbb{K})$ est elle-même découpée en blocs $A' \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, $B' \in \mathcal{M}_{r,z-s}(\mathbb{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{p-r,s}(\mathbb{K})$ et $D' \in \mathcal{M}_{p-r,z-s}(\mathbb{K})$, alors on peut écrire $MN = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$. Autrement dit, on peut effectuer le produit « par blocs ».

Remarque 14. On ne démontrera pas ce résultat (calcul technique sans intérêt) qui n'est pas explicitement au programme. Des conséquences faciles de ce résultat : on peut effetuer de même des calculs de puissances par blocs, ou même d'inverse par blocs, dans le cas où on a des rectangles de 0 à l'intérieur d'une matrice.

Exemple : Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On peut découper cette matrice en quatre blocs carrés de deux lignes deux colonnes, avec deux blocs nuls (on parle de matrice « diagonale par blocs dans ce cas »). Les deux blocs restants sont respectivement égaux à $2I_2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On calcule aisément $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$, dont on déduit que $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Plus généralement, on aura, pour tout entier naturel pair, $M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$. On peut également très rapidement montrer que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (par exemple en partant de $A^2 = 2I_2$, donc $A^{-1} = \dfrac{1}{2}A$), dont on peut également déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Définition 14. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, une matrice **extraite** de la matrice M est une matrice de la forme $N = (M_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, où I et J sont des sous-ensembles quelconques de $\{1, \dots, n\}$ et de $\{1, \dots, p\}$.

Exemple : En général, on n'extraira que des matrices carrées d'une matrice M. Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, on peut extraire la matrice carrée $N_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ correspondant au choix $I = \{1, 2\}$ et $J = \{2, 3\}$, mais aussi la matrice carrée $N_2 = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$ qui correspond au choix $I = \{2, 3\}$ et $J = \{1, 3\}$ (les indices de lignes et de colonnes n'ont aucune raison d'être consécutifs).

Proposition 12. Le rang d'une matrice M est la taille maximale de ses matrices extraites inversibles (donc carrées).

Démonstration. En effet, toute matrice carrée extraite a un rang inférieur ou égal à celui de la matrice initiale (si on a une matrice extraite de taille k qui est inversible, alors ses colonnes forment une famille libre donc les colonnes de M qui les « contiennent » forment aussi une famille libre), ce qui impose $\mathrm{rg}(M) \geqslant k$. Réciproquement, si $\mathrm{rg}(M) = k$, on peut trouver k colonne de A formant une famille libre. On fixe alors pour J l'ensemble des indices correspondant à ces colonnes, et on note N_1 la matrice (rectangulaire) extraite de M en conservant $I = \{1, \dots, n\}$ et en fixant J comme on vient de le décrire (on garde donc toutes les lignes mais en supprimant les colonnes « inutiles ». Par construction $\mathrm{rg}(N_1) = k$, donc les **lignes** de N_1 forment une famille de rang k. On peut donc isoler k lignes de N_1 qui forment une famille libre. On fixe alors I_2 l'ensemble des indices de ces lignes, et N_2 la matrice extraite (désormais carrée) en posant $I = I_2$ (sans toucher à J). La matrice N_2 est une matrice k lignes k colonnes dont les lignes forment une famille libre, elle est donc de rang k, c'est-à-dire inversible, ce qui prouve le théorème. □