Feuille d'exercices n° 8 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

14 décembre 2022

Exercice 1 (***)

Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, notons $e = b - a$ la largeur de l'intervalle. Le réel e étant strictement positif, il existe nécessairement une valeur de n pour laquelle $\dfrac{1}{2^n} < e$ (cela revient à dire que $2^n > \dfrac{1}{e}$, ce qui se produira par exemple pour $n = Ent\left(-\dfrac{\ln(e)}{\ln(2)}\right) + 1$). Fixons alors cette valeur de n, et posons $p = \max\left\{k \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{k}{2^n} \leqslant a\right\}$. Un tel entier existe nécessairement, car on peut toujours trouver un entier relatif tel que $\dfrac{k}{2^n} < a$, donc l'ensemble est non vide, et il est majoré par 0 lorsque $a \leqslant 0$, et par $a \times 2^n$ lorsque $a > 0$. Par construction, $\dfrac{p+1}{2^n} \leqslant a + \dfrac{1}{2^n} < a + e = b$. Or, $\dfrac{p+1}{2^n} > a$, sinon la minimalité de l'entier p serait contredite. On en déduit que $\dfrac{p}{2^n} \in]a,b[$, ce qui prouve bien la densité de notre ensemble dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (**)

- Soit donc un réel $M > 0$ (si $M \leqslant 0$, il suffit de prendre $n_0 = 2$ pour que la définition de la limite soit vérifiée). On aura $n^2 - 2n > M$ dès que (ce n'est pas une équivalence) $n - 2 > \sqrt{M}$ (puisqu'alors $n > \sqrt{M}$, et $n^2 = n(n-2) > M$). Il suffit donc de prendre $n_0 = Ent(2+\sqrt{M})+1$ pour satisfaire la définition de la limite infinie.
- Soit $\varepsilon > 0$, $\dfrac{1}{2n+3} < \varepsilon$ si $2n + 3 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, soit $n > \dfrac{1}{2\varepsilon} - \dfrac{3}{2}$, il suffit donc de prendre un n_0 strictement supérieur à cette quantité (je vous épargne le coup de la partie entière augmentée d'un) pour satisfaire à la définition de la limite nulle.
- Soit $\varepsilon > 0$, on calcule $\dfrac{2n-1}{n+1} - 2 = \dfrac{-3}{n+1}$. On aura donc $\left|\dfrac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$ si $\dfrac{3}{n+1} < \varepsilon$, soit $n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$, ce qui donne facilement une valeur de n_0 convenable.
- Soit $M > 0$ (si $M \leqslant 0$, encore une fois, ce n'est pas trop dur de rendre $\sqrt{n+3}$ plus grand que M). On aura $\sqrt{n+3} > M$ dès que $n > M^2 - 3$. Il suffit donc de prendre $n_0 = Ent(M^2-3)+1$.

Exercice 3 (* à **)

- On peut écrire $u_n = \dfrac{3^n}{4^n} - \dfrac{2^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. La suite est donc une différence de deux suites géométriques dont les raisons sont comprises entre -1 et 1. Ces deux suites convergent donc vers 0, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- On peut développer : $u_n = 2e^{-n} - ne^{-n}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, donc le premier terme de la différence tend vers 0. Le deuxième peut s'écrire sous la forme $\dfrac{n}{e^n}$, c'est un cas d'école

de croissance comparée, il tend également vers 0. Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

- Pour un quotient de polynôme, vous êtes autorisés à utiliser la règle du quotient des termes de plus haut degré : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-3n+2}{2n^2+5n-34} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$.
- Utilisation de la quantité conjuguée très conseillée pour ce calcul : $u_n = \frac{(\sqrt{n^2-1}-n)(\sqrt{n^2-1}+n)}{\sqrt{n^2-1}+n} = \frac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n} = \frac{-1}{\sqrt{n^2-1}+n}$. Le dénominateur de cette fraction ayant clairement pour limite $+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- La principale difficulté est la manipulation des factorielles : $u_n = \frac{n! \times (n+1) \times (n+2)}{(n^2+1) \times n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2+1} = \frac{n^2+3n+2}{n^2+1}$. Reste à utiliser la règle des termes de plus haut degré pour obtenir $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Il faut simplement faire les choses méthodiquement. D'un côté, $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{2n} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = e^0 = 1$, de l'autre côté, en utilisant la règle des termes de plus haut degré, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) = \ln(1) = 0$. Il ne reste plus qu'à additionner les deux termes pour obtenir $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- On peut factoriser si on le souhaite numérateur et dénominateur par n, mais le plus simple reste sûrement d'encadrer le quotient en utilisant que $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$. On obtient ainsi, $\forall n \geqslant 2$, $\frac{n-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n-1}$, soit $1 - \frac{2}{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{2}{n-1}$. Les deux membres extrêmes de l'encadrement ayant la même limite 1, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Revenons à la définition du sinus hyperbolique : $u_n = \frac{e^{2n}-e^{-2n}}{2} - (e^n - e^{-n}) = e^n\left(\frac{e^n}{2} - 1\right) - \frac{e^{-2n}}{2} + e^{-n}$. Une simple application des règles de calcul sur les sommes et produits de limite permet alors d'obtenir $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Pour celle-ci, difficile de s'en sortir sans équivalents (que nous n'avons pas encore étudiés !), ou du moins sans une utilisation subtile des taux d'accroissement : comme $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\pi^2}{n^2} = 1$, on peut dire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{\pi^2}{n^2}) - \ln(1)}{1+\frac{\pi^2}{n^2}} = \ln'(1) = 1$, soit $\lim_{n\to+\infty} n^2 \ln\left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right) = \pi^2$. Or, $n\sqrt{\ln\left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right)} = \sqrt{n^2\ln\left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right)}$, donc tout ce qui se trouve dans la tangente définissant u_n a pour limite $\frac{\sqrt{\pi^2}}{4} = \frac{\pi}{4}$, et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Exercice 4 (**)

Les deux conditions peuvent se traduire de la façon suivante : $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$, et $2b - a = 3c - 2b = q$ (comme a est supposé non nul, b et c ne peuvent pas non plus être nuls). La première relation revient à dire que $b = aq$ et $c = bq = aq^2$, d'où, en remplaçant dans la deuxième équation, $2aq - a = 3aq^2 - 2aq$, d'où $3aq^2 - 4aq + a = 0$, soit en factorisant par a qui est supposé non nul $3q^2 - 4q + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet deux racines réelles $q_1 = \frac{4+2}{6} = 1$, et $q_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. Si $q = 1$, la condition $2aq - a = q$ donne $a = 1$, puis

$b = aq = 1$ et $c = bq = 1$; et si $q = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{2}{3}a - a = \frac{1}{2}$, soit $a = -\frac{3}{2}$, puis $b = \frac{1}{3}a = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{3}b = -\frac{1}{6}$. Les deux seules possibilités sont donc d'avoir $a = b = c = q = 1$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont 1, 1 et 1, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont 1, 2 et 3), ou $q = \frac{1}{3}$, donc $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{6}$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{6}$, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont $-\frac{3}{2}$, -1 et $-\frac{1}{2}$).

Exercice 5 (*)

1. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 4x - 6$, ce qui donne $x = 2$. On pose donc $v_n = u_n - 2$, et on vérifie que la suite auxiliaire est géométrique : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 4u_n - 6 - 2 = 4u_n - 8 = 4(u_n - 2)$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 4, et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$. On a donc $v_n = -4^n$, puis $u_n = v_n + 2 = 2 - 4^n$.
2. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \frac{3+1}{2} = 2$ et $s = \frac{3-1}{2} = 1$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = \alpha 2^n + \beta$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $u_0 = \alpha + \beta = 0$ et $u_1 = 2\alpha + \beta = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha = 1$, puis $\beta = -\alpha = -1$, donc $u_n = 2^n - 1$.
3. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 6x + 9 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 36 = 0$, et admet une racine double $r = \frac{6}{2} = 3$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = (\alpha + \beta n)3^n$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $u_0 = \alpha \times 3^0 = 0$ et $u_1 = (\alpha + \beta) \times 3^1 = 1$. La première équation donne $\alpha = 0$, puis la deuxième donne $\beta = \frac{1}{3}$, d'où $u_n = \frac{1}{3}n3^n = n3^{n-1}$ (formule valable seulement si $n \geqslant 1$).
4. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$ et admet donc pour racines $r_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$ (qui était aussi une racine évidente), et $r_2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. On peut donc écrire $u_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Avec les conditions initiales données, $u_0 = \alpha + \beta = 1$ et $u_1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta = 2$, donc $\frac{3}{2}\beta = -1$, soit $\beta = -\frac{2}{3}$ puis $\alpha = \frac{5}{3}$. On conclut que $u_n = \frac{5}{3} + \frac{1}{3(-2)^{n-1}}$.

   Autre méthode, posons donc $v_n = u_{n+1} - u_n$, alors $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} - u_{n+1} = \frac{u_n - u_{n+1}}{2} = -\frac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$, donc $v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. On en déduit que $u_{n+1} = u_n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier n. On peut alors écrire $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ (si ça ne vous semble pas clair, faites une belle récurrence), donc $u_n = 1 + \frac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{3}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{5}{3} + \frac{1}{3(-2)^{n-1}}$. On retrouve bien sûr la même expression.
5. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $3x^2 - 4x + 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$, et qui admet donc deux racines $r = \frac{4+2}{6} = 1$, et

$s = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$. On en déduit la forme générale de la suite : $u_n = \alpha + \dfrac{\beta}{3^n}$. En utilisant les valeurs des deux premiers termes, on a $u_0 = \alpha + \beta = 2$ et $u_1 = \alpha + \dfrac{1}{3}\beta = \dfrac{10}{3}$. En soustrayant les deux équations, on obtient $\dfrac{2}{3}\beta = 2 - \dfrac{10}{3} = -\dfrac{4}{3}$, soit $\beta = -2$, puis $\alpha = 4$. On a finalement $u_n = 4 - \dfrac{2}{3^n}$.

6. Considérons d'abord la suite (v_n) pour laquelle $v_0 = 1$, $v_1 = 11$, $v_2 = 111$ etc. Une façon de la décrire est de dire que $v_0 = 1$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 10v_n + 1$ (en effet, quand on multiplie par 10, on ajoute un 0 à la fin, et en ajoutant 1 on le transforme en 1). Autrement dit, la suite (v_n) est arithmético-géométrique. Son équation de point fixe $x = 10x+1$ a pour solution $x = -\dfrac{1}{9}$. On pose donc $w_n = v_n + \dfrac{1}{9}$, la suite (w_n) devrait être géométrique, ce qu'on vérifie sans peine : $w_{n+1} = v_{n+1} + \dfrac{1}{9} = 10v_n + 1 + \dfrac{1}{9} = 10\left(v_n + \dfrac{1}{9}\right) = 10w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison 10 et de premier terme $w_0 = v_0 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{10}{9}$. Autrement dit, $w_n = \dfrac{10^{n+1}}{9}$, et $v_n = w_n - \dfrac{1}{9} = \dfrac{10^{n+1}-1}{9}$. Reste à calculer u_n, c'est-à-dire à calculer les sommes partielles de la suite (v_n) : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{n-1} 10^{k+1} - 1 = \frac{10}{9} \times \frac{1-10^n}{1-10} - \frac{n-1}{9} = \frac{10^n - 1}{81} - \frac{n-1}{9}$.
7. Séparons donc parties réelle et imaginaire en posant $z_n = a_n + ib_n$. On peut alors écrire $a_0 = 0$, $b_0 = 2$, et pour tout entier n, $a_{n+1} + ib_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n + 2ib_n - a_n + ib_n) = \dfrac{1}{3}a_n + ib_n$. Autrement dit, $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n$ et $b_{n+1} = b_n$. La suite (b_n) est donc constante égale à 2, et la suite (a_n) géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme 0. Ah ben en fait on a donc toujours $z_n = 2i$ (c'était bien la peine de se fatiguer).

Exercice 6 (**)

Notons donc $v_n = u_n + an^2 + bn + c$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2u_n + 2n^2 - n + an^2 + 2an + a + bn + b + c = 2u_n + (a+2)n^2 + (2a+b-1)n + a + b + c$. Pour que (v_n) soit géométrique, on doit avoir $v_{n+1} = qv_n = qu_n + aqn^2 + bqn + cq$. Il est nécessaire d'avoir $q = 2$, et en identifiant ensuite les coefficients des deux formules obtenues, on a $a+2 = 2a$, $2a+b-1 = 2b$ et $a+b+c = 2c$, ce qui donne successivement $a = 2$, puis $b = 2a - 1 = 3$, et enfin $c = a + b = 5$. Avec ces valeurs, la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 + 5 = 7$. Conclusion de ces calculs : $v_n = 7 \times 2^n$, puis $u_n = v_n - an^2 - bn - c = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$.

Exercice 7 (**)

Par hypothèse, on sait déjà que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$ et $v_n \leqslant 1$. De plus, la convergence du produit assure que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $1 - \varepsilon < u_n v_n \leqslant 1$ (avec les hypothèses faites sur (u_n) et (v_n), le produit ne peut certainement pas être supérieur à 1). Or, $u_n v_n \leqslant u_n$ puisque $v_n \in [0,1]$, ce qui assure que, $\forall n \geqslant n_0$, $1 - \varepsilon < u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1$, et donc que la suite (u_n) converge vers 1. Par symétrie, (v_n) converge également vers 1.

Exercice 8 (***)

1. La suite étant à valeurs strictement positive, la limite l est elle-même positive ou nulle. Si $l < 1$, posons $l' = \dfrac{1+l}{2}$, qui est un réel strictement compris entre 0 et 1. En posant $\varepsilon = l' - l > 0$,

on peut trouver un rang n_0 à partir duquel on aura $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon = l'$. Une récurrence triviale permet alors de prouver que, $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_n}{u_{n_0}} < l'^{n-n_0}$ (en effet, c'est vrai au rang n_0 de façon évidente, et on peut prouver l'hérédité en écrivant que $\dfrac{un+1}{u_{n_0}} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \times \dfrac{u_n}{u_{n_0}} \leqslant l' \times l'^n$ en exploitant la remarque précédente et l'hypothèse de récurrence). On a donc $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant u_{n_0} l'^{n-n_0}$, et ce majorant est le terme général d'une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 (et positive), donc convergeant vers 0. Comme par ailleurs la suite (u_n) est minorée par 0, le théorème des gendarmes permet d'affirmer qu'elle va converger vers 0.

2. C'est le même principe : on pose toujours $l' = \dfrac{1+l}{2}$ et on aura cette fois $1 < l' < l$. On note donc $\varepsilon = l - l'$ et on trouve un rang n_0 à partir duquel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > l'$. La même récurrence que tout à l'heure prouve alors que, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} \times l'^{n-n_0}$, avec cette fois-ci une suite minorante qui est géométrique de raison strictement supérieure à 1. La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.
3. Dans ce dernier cas, la suite (u_n) peut avoir n'importe quelle limite non nulle (il suffit de prendre la suite constante égale à l), ou bien converger vers 0 (on pose $u_n = \dfrac{1}{n}$, et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ a bien pour limite 1), ou tendre vers $+\infty$ (on peut par exemple prendre simplement $u_n = n$). Bref, aucune conclusion intéressante n'est possible.

Exercice 9 (***)

1. Assez clairement $n^2 + n \geqslant n^2$, mais on peut aussi affirmer que $n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. On déduit de ces passionnantes constatations que $n \leqslant \sqrt{n^2+n} < n+1$, et donc que $\lfloor \sqrt{n^2+n} \rfloor = n$. On peut alors calculer explicitement (avec une petite multiplication par la quantité conjuguée en passant) $u_{n^2+n} = \sqrt{n^2+n} - n = \dfrac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$. Cette dernière expression ayant pour limite $\dfrac{1}{2}$, la suite (u_n), si elle converge, aura nécessairement pour limite $\dfrac{1}{2}$ (toutes ses suites convergeant alors vers la même limite qu'elle).
2. C'est le même raisonnement que ci-dessus : $(nb)^2 = n^2b^2 \leqslant n^2b^2 + 2an < n^2b^2 + 2bn + 1 = (nb+1)^2$, donc $\lfloor \sqrt{n^2b^2+2an} \rfloor = nb$, et $u_{n^2b^2+2an} = \sqrt{n^2b^2+2an} - nb = \dfrac{2an}{\sqrt{n^2b^2+2an}+nb} = \dfrac{2a}{b+\sqrt{b+\frac{2a}{b}}}$, qui converge facilement vers $\dfrac{a}{b}$.
3. C'est évident pour tout rationnel appartenant à $[0,1]$, mais un peu moins si l est irrationnel. Dans ce cas, on peut construire une sous-suite de la façon suivante : pour tout entier k, la densité des rationnels dans $[0,1]$ assure qu'il existe un nombre rationnel $\dfrac{a}{b}$ tel que $\left| l - \dfrac{a}{b} \right| \leqslant \dfrac{1}{2k}$. On fixe ce rationnel et, en appliquant la définition de la limite à la sous-suite construire à la question précédente, on trouve un entier n_0 tel que $\left| u_{n_0^2b^2+2an_0} - \dfrac{a}{b} \right| < \dfrac{1}{2n}$. On fixe alors $\varphi(k) = n_0^2b^2 + 2an_0$ (si jamais cet entier est inférieur à un entier déjà sélectionné pour une plus petite valeur de k, on va en chercher un plus grand, les inégalités restant vraies à partir du rang n_0, ça ne pose aucun problème). Par construction, on aura $|u_{\varphi(k)} - l| \leqslant \left| u_{\varphi(k)} - \dfrac{a}{b} \right| + \left| \dfrac{a}{b} - l \right| \leqslant \dfrac{1}{n}$, ce qui prouve la convergence de la sous-suite ainsi construite vers l.

Exercice 10 (**)

1. La suite (u_n) est une suite récurrente. Nous n'avons malheureusement pas encore vu en classe comment traiter ce genre de suite de façon systématique, on va donc s'en sortir avec les moyens du bord. Cherchons à déterminer sa monotonie : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - u_n = \frac{a}{2u_n} - \frac{1}{2}u_n = \frac{a - u_n^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{a} - u_n)(\sqrt{a} + u_n)}{2u_n}$. Une récurrence triviale permet de prouver que tous les termes de la suite sont positifs : c'est vrai pour u_0 par hypothèse, et si $u_n > 0$, a étant lui-même positif, u_{n+1} le sera également. Le facteur $\sqrt{a} + u_n$ est donc aussi positif, et le signe de $u_{n+1} - u_n$ ne dépend que de la position de u_n par rapport à $\sqrt{a}$. Posons donc pour nous aider $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{a}{2x}$ (de façon à avoir $f(u_n) = u_{n+1}$). La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2} = \frac{x^2 - a}{2x^2}$. Cette dérivée s'annule en $\sqrt{a}$, la fonction f y admet un minimum de valeur $f(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. On en déduit que, $\forall x > 0$, $f(x) \leqslant \sqrt{a}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant \sqrt{a}$, et $u_{n+1} - u_n$ est donc nécessairement négatif à partir du rang 1 (pour $n = 0$, cela dépend de la valeur choisie). La suite est donc décroissante à partir du rang 1. Étant minorée par 0, elle converge nécessairement vers un réel l. Revenons à la relation de récurrence pour déterminer l : $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$, et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} = \frac{1}{2}l + \frac{a}{2l}$, donc on doit avoir $l = \frac{l}{2} + \frac{a}{2l}$ (notons au passage que l ne peut pas être nulle, sinon u_{n+1} ne converge plus), soit $2l^2 = l^2 + a$, donc $l = \sqrt{a}$ (impossible que la limite soit négative). Conclusion : la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

2. Calculons donc $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}} = \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}u_n}{u_n^2 + a + 2\sqrt{a}u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} = v_n^2$. On peut alors prouver par récurrence que $v_n = v_0^{(2^n)}$. En effet, c'est trivialement vrai pour $n = 0$, et si on le suppose au rang n, alors $v_{n+1} = v_n^2 = (v_0^{(2^n)})^2 = v_0^{(2 \times 2^n)} = v_0^{(2^{n+1})}$, la propriété est donc vraie au rang $n + 1$ et la récurrence fonctionne.

3. D'après la question précédente, $u_n - \sqrt{a} = v_0^{2^n}(u_0 + \sqrt{a})$ (même pas besoin de majoration, on a la valeur exacte). Pour $a = 2$, et par exemple $u_0 = 1$ (sans valeur de u_0, l'application numérique est impossible), on a $u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{1 + \sqrt{2}}\right)^{2^n} \times (1 + \sqrt{2})$ (on a changé le signe dans la puissance pour prendre la valeur absolue). Il suffit donc de prendre un n pour lequel $2^n \ln\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2 + 1}}\right) \geqslant -100\ln(10) - \ln(1 + \sqrt{2})$, ce qui donne $2^n \geqslant 132$, soit $n \geqslant 8$ (encore un coup de ln si on veut être très précis). Il suffit donc de prendre le terme d'indice 8 de la suite pour avoir une valeur approchée de la limite correcte à 10^{-100} près !

Exercice 11 (***)

1. On calcule donc $u_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$, $v_1 = u_1 = 2$ et $w_1 = 0 + 1 = 1$.
   Puis $u_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{5}{2}$, $v_2 + 2u_2 = 5$ et $w_2 = 0 + \frac{2}{2} + 2 \times 2 = 5$.
   Enfin, $u_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{8}{3}$, $v_3 = 6u_3 = 16$ et $w_3 = 0 + \frac{6}{3} + 2 \times \frac{6}{3} + 3 \times 6 = 24$.

2. En exploitant la symétrie des coefficients binomiaux $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, on se rend compte qu'en remplaçant k par $n - k$ dans la somme, les deux expressions sont effectivement égales

(on se contente en fait d'effectuer la somme en sens inverse). On a donc, en développant, $w_n = \sum_{k=0}^{n} n\frac{n!}{\binom{n}{k}} - \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{\binom{n}{k}} = n \times n!u_n - w_n$, soit $2w_n = nv_n$ et donc $w_n = \frac{nv_n}{2}$.

3. On sait déjà que $w_n = \frac{n}{2}v_n = \frac{n \times n!}{2}u_n$. Effectuons par ailleurs un calcul astucieux : $w_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1-1)\frac{n!}{\binom{n}{k}}$ (on applique une bonne vieille astuce belge). En séparant le facteur en $k+1$ et -1, on trouve alors $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)n!}{\binom{n}{k}} - n!u_n$. Or, on peut écrire que $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ (c'est une variante de la formule sans nom), donc $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1) \times n!}{\binom{n+1}{k+1}} - n!u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{\binom{n+1}{k+1}} - n!u_n = (n+1)!\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} - n!u_n$. On reconnait presque dans la première somme la valeur de u_{n+1}, il ne manque que le terme numéro 0. Autrement dit, on a $w_n = (n+1)!(u_{n+1}-1) - n!u_n$, donc $\frac{nn!}{2}u_n = (n+1)!(u_{n+1}-1) - n!u_n$. On divise tout par $n!$: $\frac{n}{2}u_n = (n+1)(u_{n+1}-1) - u_n$, soit $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n}{n+1} + \frac{nu_n}{2n+2} = \frac{(n+2)u_n}{2n+2}$. C'est exactement la relation demandée.

4. On peut calculer $u_4 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = \frac{8}{3}$, et en déduire à l'aide de la relation précédente que $u_5 = 1 + \frac{6}{10}u_4 = 1 + \frac{3}{5} \times \frac{8}{3} = 1 + \frac{8}{5} = \frac{13}{5}$. Ensuite, $u_6 = 1 + \frac{7}{12}u_5 = 1 + \frac{91}{60} = \frac{151}{60}$, et enfin $u_7 = 1 + \frac{8}{15}u_6 = 1 + \frac{4}{7} \times \frac{151}{60} = 1 + \frac{151}{105} = \frac{256}{105}$. Passionnant.

5. C'est un calcul tout bête exploitant la question 2 : $t_{n+1} = \frac{2^{n+1}u_{n+1}}{n+2} = \frac{2^{n+1}}{n+2} + \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+2}{2n+2}u_n = \frac{2^{n+1}}{n+2} + \frac{2^{n+1}}{2(n+1)}u_n = \frac{2^{n+1}}{n+2} + \frac{2^n}{n+1}u_n = \frac{2^{n+1}}{n+2} + t_n$.

6. On procède par exemple par récurrence, en prouvant plus simplement que $t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1}$. Au rang 0, le membre de droite de la relation vaut 1 (un seul terme dans la somme égal à 1), ce qui est bien la valeur de t_0. Supposons la relation vraie au rang n, alors $t_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+2} + t_n = \frac{2^{n+1}}{n+2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k+1}$, ce qui achève la récurrence.

Exercice 12 (**)

1. Prenons par exemple $\varepsilon = 1$ dans la définition et fixons $p = n_0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall q \geqslant n_0$, $|u_q - u_{n_0}| < 1$. À partir du rang n_0, la suite (u_n) est donc bornée par $u_{n_0} - 1$ et $u_{n_0} + 1$. On termine en appliquant le même raisonnement que pour montrer qu'une suite convergente est bornée : l'ensemble des n_0 premiers termes de la suite étant fini, il est majoré et minoré. On prend le minimum des deux minorants obtenus et le maximum des deux majorants pour obtenir des bornes valables pour tous les termes de la suite.

2. Appliquons la définition de la limite au réel strictement positif $\frac{\varepsilon}{2}$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mais alors, par inégalité triangulaire, pour tout couple d'entiers (p, q) tous les deux supérieurs à n_0, on peut écrire $|u_p - u_q| = |u_p - l + l - u_q| \leqslant |u_p - l| + |l - u_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ce qui prouve que la suite est une suite de Cauchy.

3. La suite étant bornée d'après la question 1, elle admet une sous-suite convergeant vers une certaine limite l. Fixons alors un $\varepsilon > 0$ et appliquons la définition de la suite de Cauchy à $\frac{\varepsilon}{12}$. On peut donc trouver un entier n_0 à partir duquel on aura toujours $|u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{12}$. Parmi tous les termes d'indice supérieur ou égal à n_0, il en existe correspondant à des termes de la sous-suite convergeante tels que $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{37}$ (c'est la définition de la convergence qui l'assure), fixons p égal à l'un de ces indices. On peut alors écrire que, $\forall q \geqslant n_0$, $|u_q - l| = |u_q - u_p + u_p - l| \leqslant |u_q - u_p| + |u_p - l| < \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{37}$, ce qui assure très largement la convergence de la suite (u_n) vers l.

Exercice 13 (***)

1. Commençons donc par prouver la croissance de f sur $\mathbb{R}^{+*}$. On a $f(x) = x \ln \frac{x+a}{x} = x \ln(x+a) - x \ln x$, donc $f'(x) = \ln(x+a) + \frac{x}{x+a} - \ln x - 1$, et $f''(x) = \frac{1}{x+a} + \frac{x+a-x}{(x+a)^2} - \frac{1}{x} = \frac{x(x+a) + ax - (x+a)^2}{x(x+a)^2} = \frac{-a^2}{x(x+a)^2} < 0$. La fonction f' est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or, $f'(x) = \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) + \frac{x}{x+a} - 1$ a pour limite 0 en $+\infty$ (en effet, ce qui se trouve dans le ln a pour limite 1 donc le terme avec le ln tend vers 0, et en conservant les termes de plus haut degré, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+a} = 1$). Il est inutile ici (même si ce n'est pas spécialement difficile) de calculer la limite de f' en 0, on peut déjà conclure que f' est toujours positive, ce dont on déduit que f est bien croissante.

   Il faut maintenant faire le lien avec la suite (u_n) en remarquant que $\ln(u_n) = n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = f(n)$. La fonction f étant croissante, on aura certainement, pour tout entier n, $f(n) \leqslant f(n+1)$, c'est-à-dire $\ln(u_n) \leqslant \ln(u_{n+1})$. Un petit passage à l'exponentielle donne alors $u_n \leqslant u_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

2. Le plus simple est de démontrer séparément chacune des deux inégalités en faisant tout passer d'un seul côté et en faisant des études de fonctions. Posons ainsi $g(t) = t - \ln(1+t)$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^+$ (elle est même définie entre -1 et 0, mais pour ce qu'on nous demande, pas la peine de s'y intéresser), de dérivée $g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geqslant 0$. La fonction g est donc croissante, et comme $g(0) = 0$, elle est toujours positive, ce qui prouve que $t - \ln(1+t)$ sur $\mathbb{R}_+$, soit $\ln(1+t) \leqslant t$. Pour cette inégalité, on pouvait aussi invoquer la concavité de la fonction ln.

   De même, on pose $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$, fonction dont la dérivée vaut $\frac{1}{1+t} - \frac{1+t-t}{(1+t)^2} = \frac{1+t-1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} \geqslant 0$. Cette fonction est donc également croissante, et vérifie aussi $h(0) = 0$, d'où sa positivité sur $\mathbb{R}_+$ et l'encadrement souhaité.

3. On a vu que $\ln u_n = n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)$, donc en posant $t = \frac{a}{n}$ et en appliquant l'encadrement de la question précédente, $\frac{\frac{a}{n}}{1 + \frac{a}{n}} \leqslant n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \leqslant \frac{a}{n}$, soit $\frac{\frac{a}{n}}{\frac{n+a}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \ln u_n \leqslant \frac{a}{n}$, ou encore $\frac{a}{a+n} \leqslant \frac{1}{n} \ln u_n \leqslant \frac{a}{n}$. Il ne reste plus qu'à tout multiplier par n pour obtenir l'encadrement demandé.

4. Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{na}{n+a} = a$ (on garde les termes de plus haut degré, a étant toujours une constante), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\ln(u_n)$ converge vers a. La suite (u_n) a donc pour limite e^a.

5. Pour $a = 1$, on obtient le résultat classique suivant : $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Exercice 14 (**)

1. En effet, $a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = 3u_n + v_n + 1 + 2 - 2u_n = u_n + v_n + 3 = a_n + 3$. La suite est bien arithmétique de raison 3 et de premier terme $a_0 = 2$, donc $a_n = 2 + 3n$.
2. Allons-y : $b_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 6u_n + 2v_n + 2 + 2 - 2u_n = 4u_n + 2v_n + 4 = 2b_n + 4$. La suite est bien arithmético-géométrique. Son équation de point fixe $x = 2x + 4$ a pour solution $x = -4$, on pose donc $c_n = b_n + 4$, et on vérifie que (c_n) est une suite géométrique : $c_{n+1} = b_{n+1} + 4 = 2b_n + 8 = 2(b_n + 4) = 2c_n$. La suite (c_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $c_0 = b_0 + 4 = 2u_0 + v_0 + 4 = 7$. On en déduit que $c_n = 7 \times 2^n$, puis $b_n = c_n - 4 = 7 \times 2^n - 4$.
3. Il suffit de combiner a_n et b_n : en faisant simplement leur différence, on obtient immédiatement $u_n = b_n - a_n = 7 \times 2^n - 4 - (2 + 3n) = 7 \times 2^n - 3n - 6$. Ensuite, $v_n = a_n - u_n = 2 + 3n - u_n = 8 + 6n - 7 \times 2^n$.
4. Calculons : $S_n = \sum_{k=0}^{n} 7 \times 2^k - 3k - 6 = 7 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} - 6(n+1) = 7 \times 2^{n+1} - 7 - \frac{3n(n+1)}{2} - 6n - 6 = 7 \times 2^{n+1} - \frac{3}{2}n^2 - \frac{15n}{2} - 13$. Ce résultat n'a absolument aucun intérêt, pas plus d'ailleurs que le fait que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, qui découle d'un simple résultat de croissance comparée.

Exercice 15 (*)

1. Il faut donc résoudre l'équation $\frac{4x+2}{x+5} = x$, soit $4x + 2 = x^2 + 5x$, qui se ramène à l'équation du second degré $x^2 + x - 2 = 0$, qui a pour racines évidentes $a = -2$ et $b = 1$.
2. Pour cela, il faut que u_n ne soit jamais égal à a. On sait déjà que c'est le cas pour u_0 qui est supposé strictement positif, et on peut démontrer aisément par récurrence que tous les termes de la suite seront également strictement positifs, ce qui répond à la question. Mais on va chercher à faire plus rigolo : remarquons que $u_{n+1} = a$ équivaut à $f(u_n) = a$. Or, l'équation $f(x) = a$ se ramène à $4x + 2 = -2(x + 5)$, soit $6x = -12$, donc $x = -2 = a$. Autrement dit, pour avoir $u_{n+1} = a$, il faut déjà avoir $u_n = a$. Notons alors n le plus petit entier pour lequel $u_n = a$ (en supposant qu'un tel entier existe). On a nécessairement $n > 0$ puisque $u_0 \neq a$, mais d'après ce qui précède, cela implique alors $u_{n-1} = a$, ce qui contredit la minimalité de n. Autrement dit, il est impossible qu'un tel entier n existe, et u_n est donc toujours différent de a.
3. Un calcul peu subtil : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{4u_n+2}{u_n+5} - 1}{\frac{4u_n+2}{u_n+5} + 2} = \frac{4u_n + 2 - u_n - 5}{4u_n + 2 + 2u_n + 10} = \frac{3u_n - 3}{6u_n + 12} = \frac{1}{2}\frac{u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\frac{1}{2}$. Conclusion : $v_n = -\frac{1}{2^{n+1}}$.
4. Puisque $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$, $v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$, donc $u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$, et $u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} + 1}$.

Exercice 16 (**)

Prouvons les trois points habituels :

- $u_{n+1} - u_n = \left(1 + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!}\right) u_n - u_n = \dfrac{u_n}{(n+1)(n+1)!} \geqslant 0$, donc la suite (u_n) est croissante.
- $v_{n+1} - v_n = \left(1 + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!}\right) u_{n+1} - \left(1 + \dfrac{1}{nn!}\right) u_n$
  $= \left(\left(1 + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!}\right)^2 - 1 - \dfrac{1}{nn!}\right) u_n$
  $= \left(\dfrac{2}{(n+1)(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)^2(n+1)!^2} - \dfrac{1}{nn!}\right) u_n$
  $= \dfrac{u_n}{n(n+1)(n+1)!}\left(2n + \dfrac{n}{(n+1)(n+1)!} - (n+1)^2\right)$. Le terme $\dfrac{n}{(n+1)(n+1)!}$ étant (largement) inférieur à 1, on peut majorer toute la parenthèse par $2n + 1 - (n+1)^2 = -n^2 < 0$, donc la suite (v_n) est décroissante.
- $v_n - u_n = \dfrac{u_n}{nn!} \geqslant 0$, ce qui prouve que $u_n \leqslant v_n$ mais n'est pas exactement suffisant à prouver que la limite de la différence est nulle. Sauf qu'on peut désormais dire que $u_n \leqslant v_n \leqslant v_1$, donc $v_n - u_n \leqslant \dfrac{v_1}{nn!}$, et le théorème des gendarmes assure alors la convergence de $(v_n - u_n)$ vers 0. Les deux suites sont donc bien adjacentes.

Exercice 17 (*)

Il y a deux points sur les trois qui sont très faciles à prouver :

- $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \times n!}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.
- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

Ne reste plus qu'à prouver que (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - u_n - \dfrac{1}{n \times n!} = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \dfrac{1}{n \times n!} = \dfrac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n \times (n+1) \times (n+1)!} = \dfrac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)(n+1)!} = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$. La suite (v_n) est donc bien décroissante, et les deux suites étant adjacentes, elles convergent donc vers une limite commune.

Notons donc l la limite commune des deux suites, et supposons que $l = \dfrac{a}{b}$, avec a et b deux entiers naturels. Comme la suite (u_n) est strictement croissante, et la suite (v_n) strictement décroissante, on peut écrire, pour tout entier n, $u_n < l < v_n$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} < \frac{a}{b} < \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}$. C'est en particulier vrai lorsque $n = b$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=b} \frac{1}{k!} < \frac{a}{b} < \sum_{k=0}^{k=b} \frac{1}{k!} + \frac{1}{b \times b!}$. Multiplions cet encadrement par $b \times b!$: $\displaystyle b\sum_{k=0}^{k=b} \frac{b!}{k!} < a \times b! < b\sum_{k=0}^{k=b} \frac{b!}{k!} + 1$. À gauche, chaque quotient $\dfrac{b!}{k!}$ est un entier lorsque $k \leqslant b$ (en effet, $b!$ est un multiple de $k!$ pour tous les entiers k compris entre 0 et b), donc le membre de gauche est une somme d'entiers et appartient à $\mathbb{N}$. Notons ce nombre p. Le membre de droite est le même que celui de gauche, avec un simple $+1$, donc est égal à $p + 1$. On a donc $p < a \times b! < p + 1$. Autrement dit, le nombre $a \times b!$, qui est lui aussi un nombre entier, est strictement compris entre les deux entiers consécutifs p et $p + 1$. Ce n'est pas possible ! On a prouvé par l'absurde que l ne pouvait pas être un nombre rationnel (pour les curieux, la valeur de l est en fait le nombre e que nous connaissons bien depuis l'étude de la fonction exponentielle).

Exercice 18 (**)

1. Il suffit pour cela de prouver par récurrence (simultanée pour les deux suites) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si u_n et v_n sont tous deux strictement positifs, ce sera aussi le cas de $u_n + v_n$ et de $u_n v_n$, donc de u_{n+1} et v_{n+1}. Ainsi, les deux suites sont bien définies.
2. Supposons $n \geqslant 1$ (pour $n = 0$ l'inégalité est vraie par hypothèse). On a $v_n - u_n = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}}\sqrt{v_{n-1}}}{2} = \dfrac{(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2}{2} > 0$, donc $u_n \leqslant v_n$.
3. C'est désormais facile en utilisant le résultat de la question précédente : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) > 0$ puisque $v_n > u_n$, donc (u_n) est strictement croissante. De même, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} < 0$, donc (v_n) est décroissante.
4. On ne peut pas affirmer que les suites sont adjacentes car on ne sait pas si $(u_n - v_n)$ tend vers 0. Par contre, (u_n) étant croissante et majorée par exemple par v_0 (car $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ puisque la suite (v_n) est decroissante), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer qu'elle est convergente vers une certaine limite l. De même, (v_n) est décroissante et minorée (encore plus simplement, par 0), donc converge vers une limite l'. La suite (v_{n+1}) converge aussi vers l', mais comme $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, on a donc, par passage à la limite, $l' = \dfrac{l + l'}{2}$, d'où $\dfrac{l'}{2} = \dfrac{l}{2}$, soit $l = l'$. Finalement, les deux suites ont bien la même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique des deux réels a et b).

Exercice 19 (**)

1. On va bien sûr procéder par récurrence, en prouvant simultanément que $u_n \in [0, 3]$ et $v_n \in [0, 3]$. C'est vrai au rang 0 puisque $u_0 = v_0 = 0$. Supposons donc que u_n et v_n appartiennent à $[0, 3]$ pour un certain entier n, alors $3 - v_n \in [0, 3]$, donc $u_{n+1} \in [0, \sqrt{3}]$ (et a fortioro $u_{n+1} \in [0, 3]$). De même, $3 + u_n \in [3, 6]$, donc $v_{n+1} \in [\sqrt{3}, \sqrt{6}] \subset [0, 3]$, ce qui achève l'hérédité de notre récurrence.
2. Supposons donc que (u_n) converge vers l et (v_n) vers l'. Alors on peut passer à la limite dans les relations de récurrence définissant les deux suites pour obtenir $l = \sqrt{3 - l'}$ et $l' = \sqrt{3 + l}$. On aurait donc $l^2 = 3 - l' = 3 - \sqrt{3 + l}$, soit $l^2 - 3 = -\sqrt{3 + l}$, puis en élevant à nouveau au carré $l^4 - 6l^2 + 9 = 3 + l$, soit encore $l^4 - 6l^2 - l + 6 = 0$. Cette équation semble a priori impossible à résoudre, mais coup de chance, 1 est solution évidente, et on peut donc factoriser sous la forme $l^4 - 6l^2 - l + 6 = (l-1)(al^3 + bl^2 + cl + d) = al^4 + (b-a)l^3 + (c-b)l^2 + (d-c)l - d$. Une identification impose les conditions $a = 1$, puis $b - a = 0$ donc $b = a = 1$, $c - b = -6$ donc $c = -5$ et $d - c = -1$ donc $d = -6$ (ce qui est cohérent avec l'équation donnée par le coefficient constant). Deuxième miracle, on constate que le facteur restant $l^3 + l^2 - 5l - 6$ admet pour racine presque évidente $l = -2$: $-8 + 4 + 10 - 6 = 0$, donc on peut à nouveau factoriser sous la forme $l^3 + l^2 - 5l - 6)(l+2)(el^2 + fl + g) = el^3 + (f + 2e)l^2 + (g + 2f)l + 2g$. Une nouvelle identification des coefficients donne $e = 1$, $f + 2e = 1$ donc $f = -1$ et $g + 2f = -5$ donc $g = -3$. On garde donc un dernier facteur égal à $x^2 - x - 3$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 12 = 13$ et admet donc deux racines réelles $l_3 = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$ et $l_4 = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2}$. Après cet ébouriffant calcul, on sait donc que l prend l'une des quatre valeurs suivantes : 1, -2, $\dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$ ou $\dfrac{1 - \sqrt{13}}{2}$. On peut immédiatement éliminer les valeurs strictement négatives -2

et $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ puisque la suite (u_n) est positive. La valeur $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ est en fait aussi à éliminer puisque supérieure à 2 ($\sqrt{13} > 3$), alors que, d'après la question précédente, (u_n) est majorée par $\sqrt{3}$. Finalement, on a nécessairement $l = 1$. Bien sûr, on en déduit que $l' = \sqrt{3+1} = 2$.

3. Calculons $a_{n+1} = \sqrt{3-v_n} - 1 = \dfrac{3-v_n-1}{\sqrt{3-v_n}+1} = \dfrac{-b_n}{1+\sqrt{3-v_n}}$. Le dénominateur de cette fraction étant supérieur à 1, on a bien en valeur absolue $|a_{n+1}| \leqslant |b_n|$. De même, $b_{n+1} = \sqrt{3+u_n} - 2 = \dfrac{3+u_n-4}{2+\sqrt{3+u_n}} = \dfrac{a_n}{2+\sqrt{u_n+3}}$ est majoré en valeur absolue par $\dfrac{|a_n|}{2}$.
4. En effet, si $|a_{n+2}| \leqslant |b_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|a_n| \leqslant \dfrac{1}{2}c_n$ et $|b_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|a_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|b_n| \leqslant \dfrac{1}{2}c_n$, donc $c_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2}c_n$. Une récurrence facile montre alors que $c_{2n} \leqslant \dfrac{c_0}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, et $c_{2n+1} \leqslant \dfrac{c_1}{2^n} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2^n}$. Ces deux sous-suites convergent donc vers 0 (théorème des gendarmes, les sous-suites de (c_n) sont toujours positives en tant que valeurs absolues), donc (c_n) elle-même a une limite nulle. Or, par définition, $0 \leqslant |a_n| \leqslant c_n$ et $0 \leqslant |b_n| \leqslant c_n$, donc le théorème des gendarmes permet à nouveau de prouver que $(|a_n|)$ et $(|b_n|)$, et donc (a_n) et (b_n), ont une limite nulle. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\underset{n\to+\infty}{v}{}_n = 2$ puisque $u_n = a_n + 1$ et $v_n = b_n + 2$.

Exercice 20 (***)

1. Supposons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, et choisissons un $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier n_0 à partir duquel on aura $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Découpons alors v_n en deux parties : ce qui se passe avant n_0 et après n_0 : si $n > n_0$, $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n_0} u_k + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=n_0+1}^{k=n} u_k$. La première somme est une constante (on peut modifier n, mais n_0, lui, est fixé), donc, quand on la divise par n, ça va finir par se rapprocher de 0. Autrement dit, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_1$, $\dfrac{1}{n}\left|\sum\limits_{k=1}^{k=n_0} u_k\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Quand à la deuxième somme, elle est constituée de $n - n_0$ termes qui, d'après ce qu'on a dit plus haut, sont tous inférieurs (en valeur absolue) à $\dfrac{\varepsilon}{2}$, donc par inégalité triangulaire sa valeur absolue est inférieure à $(n-n_0)\dfrac{\varepsilon}{2}$, d'où $\dfrac{1}{n}\left|\sum\limits_{k=n_0+1}^{k=n} u_k\right| \leqslant \dfrac{n-n_0}{n}\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ (puisque $\dfrac{n-n_0}{n} \leqslant 1$). Conclusion, lorsque $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a $|v_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ceci suffit à prouver que la suite (v_n) tend vers 0, et a donc bien la même limite que (u_n).

   Passons désormais au cas général (qui va être facile en fait), c'est à dire lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$. Posons $w_n = u_n - l$, cette suite auxilaire a pour limite 0, donc on peut lui appliquer ce qu'on vient de démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} w_k = 0$. Or, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} w_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}(u_k - l) = \dfrac{1}{n}\left((\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k) - nl\right) = \left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k\right) - l$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k = l$, ce qu'on voulait prouver.
2. La réciproque est fausse. On peut prendre comme contre-exemple $u_n = (-1)^n$. Dans ce cas $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k = 0$ si n est impair (on additionne un nombre égal de termes égaux à 1 et à -1 dans la somme), et $v_n = \dfrac{1}{n}$ si n est pair. La suite (v_n) converge donc vers 0. Pourtant la suite (u_n) ne converge pas.

3. Supposons que (u_n) diverge vers $+\infty$ (il suffit de changer les signes pour traiter le cas où la limite vaut $-\infty$), et fixons $M \in \mathbb{R}^+$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n > 4M$. Par ailleurs, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$ est une constante que nous noterons A. On peut alors écrire (si $n \geqslant n_0$) $v_n = \dfrac{A}{n} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{n_0}^{n} u_k \geqslant \dfrac{A}{n} + \dfrac{4M(n-n_0)}{n}$. Quitte à choisir n suffisamment grand, on peut imposer $\dfrac{A}{n} > -M$ (puisque cette expression a une limite nulle), mais aussi $\dfrac{n-n_0}{n} > \dfrac{1}{2}$ (puisque cette fois-ci l'expression tend vers 1, ce qui donnera $v_n > -M + 2M = M$ et prouve donc que (v_n) diverge vers $+\infty$ comme (u_n).

   La réciproque n'est toujours pas vraie pour une suite divergeant vers $+\infty$. Considérons par exemple une suite (u_n) pour laquelle $u_{2n} = 2n$ mais $u_{2n+1} = 0$ (pour tout entier naturel n). On calcule alors, si $n = 2p$ est pair, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{p} 2k = \dfrac{2p(p+1)}{2n} = \dfrac{p+1}{2} = \dfrac{n+2}{4}$. Dans le cas où $n = 2p+1$ est impair, on calcule de même $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{p} 2k = \dfrac{2p(p+1)}{2n} = \dfrac{(n-1)(n+2)}{4n} \geqslant \dfrac{n-1}{4}$. La suite (v_n) est donc minorée par une suite de limite $+\infty$, elle diverge elle-même vers $+\infty$. Pourtant, la suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$ puisque la sous-suite $(_{2n+1})$ est nulle.

4. Supposons par exemple la suite (u_n) croissante (le cas décroissante se traite de même en changeant tous les signes) et non convergente, donc nécessairement non majorée. Notons l la limite de la suite (v_n) (qu'on supposera positive, sinon on peut là aussi faire le raisonnement à quelques changements de signes près). On aurait alors, à partir d'un certain rang n_0, $u_n > 2l$ puisque la suite est supposée non majorée et croissante (il suffit de trouver un terme de la suite supérieur à $2l$, tous les suivants le seront aussi). Pour tout entier $n \geqslant 3n_0$, on pourra alors écrire $v_n = \dfrac{1}{3n_0+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \dfrac{1}{3n_0+1}\sum_{k=n_0+1}^{3n_0} u_k \geqslant \dfrac{4ln_0+K}{3n_0+1}$, en ayant posé $K = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} u_k$. Autrement dit, la suite (v_n) censée converger vers l est minorée par une suite qui converge vers $\dfrac{4}{3}l$, ce qui est évidemment impossible. La suite (u_n) converge donc nécessairement.

5. Posons pour plus de simplicité $w_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} ku_k$, et supposons dans un premier temps que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Il existe donc un rang n_0 à partir duquel $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. On découpe la somme en deux comme précédemment : $w_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} ku_k + \dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=n_0+1}^{n} ku_k$. La première moitié a certainement une limite nulle, donc deviendra inférieure en valeur absolue à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang n_1. Quant à la deuxième moitié, on la majore en valeur absolue (comme dans la question 1) par $\dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{k\varepsilon}{2} \leqslant \dfrac{2}{n(n+1)} \times \dfrac{n(n+1)}{2}\dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{\varepsilon}{2}$. On a donc globalement, lorsque $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $|w_n| \leqslant \varepsilon$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$. Comme $v_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2}w_n$, avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

   Supposons désormais $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$. Posons comme précédemment $z_n = u_n - l$, alors $w_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\sum kz_k$ tend vers 0. Or, $w_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(ku_k - kl) = \dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n} ku_k - l$.

Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n} ku_k = l$, soit en multipliant par $\frac{n(n+1)}{2n^2}$ qui tend toujours vers $\frac{1}{2}$, la conclusion $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} ku_k = \frac{l}{2}$.

Exercice 21 (**)

1. La seul chose qui pourrait empêcher la suite d'être correctement définie serait la présence d'un terme égal à -1 (annulant donc le dénominateur pour le calcul de u_{n+1}), prouver que $u_n \geqslant 0$ est donc suffisant. C'est une récurrence double triviale : u_0 et u_1 sont positifs par hypothèse, et en supposant u_n et u_{n+1} tous les deux positifs, u_{n+2} le sera également.
2. Calculons donc brutalement $(u_{n+2} - u_{n+1})(u_{n+2} - u_n) = \frac{(1+u_n)u_{n+1} - u_{n+1}(1+u_{n+1})}{1+u_{n+1}} \times \frac{(1+u_n)u_{n+1} - u_n(1+u_{n+1})}{1+u_{n+1}} = \frac{(u_n u_{n+1} - u_{n+1}^2)(u_{n+1} - u_n)}{(1+u_{n+1})^2} = -\frac{u_{n+1}(u_n - u_{n+1})^2}{(1+u_{n+1})^2}$, expression du signe opposé à celui de u_{n+1}, donc toujours négative d'après la question 1.
3. On peut par exemple procéder par récurrence. Par hypothèse, $u_0 \leqslant u_1$, ce qui prouve l'initialisation. Supposons désormais $u_{2n} \leqslant u_{2n+1}$ pour un certain entier n, alors d'après la question précédent, $(u_{2n+2} - u_{2n+1})(u_{2n+2} - u_{2n})$ est négatif, ce qui signifie que $u_{2n+2} - u_{2n+1}$ et $u_{2n+2} - u_{2n}$ sont de signe opposé. Autrement dit, u_{2n+2} est situé entre u_{2n} et u_{2n+1} : $u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant u_{2n+1}$. Exactement de la même façon, on aura ensuite $u_{2n+2} \leqslant u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1}$, ce qui prouve en particulier que $u_{2(n+1)} \leqslant u_{2(n+1)+1}$ et achève donc la récurrence.
4. On a vu à la question précédente que $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ et $u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1}$. La suite (u_{2n}) est donc croissante, et la suite (u_{2n+1}) décroissante. De plus, (u_{2n}) est majorée par u_1 (puisque $u_{2n} \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_1$) et (u_{2n+1}) minorée par 0, donc les deux sous-suites convergent. Notons l et l' leurs limites respectives. La relation de récurrence définissant la suite, appliquée pour un entier n pair, impose alors par passage à la limite $l = \frac{1+l}{1+l'} \times l'$, soit $l(1+l') = l'(1+l)$, ou encore $l = l'$. Les deux sous-suites ayant la même limite, la suite (u_n) converge donc également vers cette limite commune.

Exercice 22 (***)

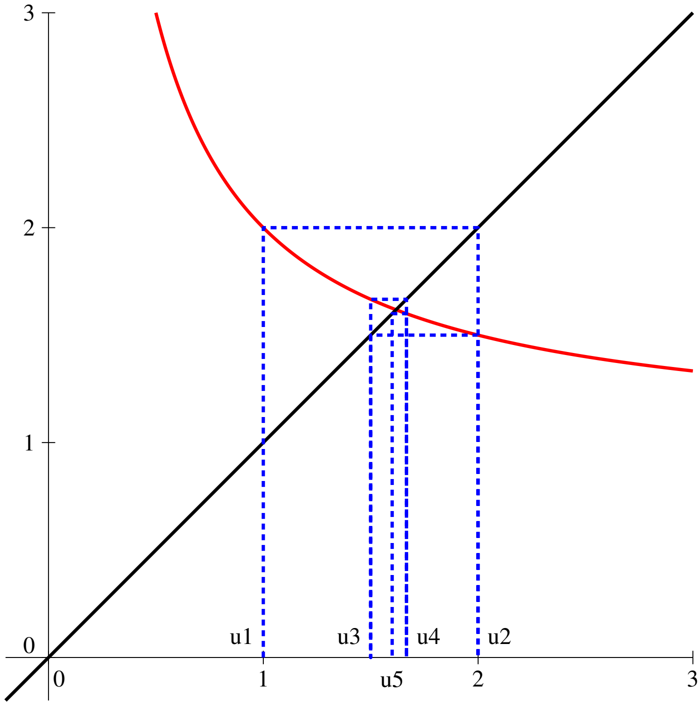
1. Si z_0 est réel, tous les termes de la suite seront également réels. Or, pour un réel $\frac{x+|x|}{2}$ est égal à 0 si x est négatif, et égal à x si x est positif. Si z_0 est un réel négatif, la suite sera donc nulle à partir du rang 1 (une fois que $z_1 = 0$, on ne bouge plus), et si z_0 est un réel positif, elle est constante égale à z_0.
2. Il suffit d'écrire que $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} = \frac{r_n e^{i\theta_n} + r_n}{2} = \frac{r_n(1+e^{i\theta_n})}{2}$. Une petit factorisation par l'angle moitié s'impose : $z_{n+1} = r_n e^{i\frac{\theta_n}{2}} \times \frac{e^{i\frac{\theta_n}{2}} + e^{\frac{-i\theta_n}{2}}}{2} = r_n \cos(\theta_n) e^{i\frac{\theta_n}{2}}$. Autrement dit, on aura simplement $r_{n+1} = r_n \cos(\theta_n)$ et $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.
3. Pour θ_n, c'est facile, la suite est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et $\theta_n = \frac{\theta}{2^n}$. Pour r_n, c'est un peu plus laid puisque $r_n = r \times \cos(\theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$. A priori, ce produit n'est pas très sympathique, mais une astuce diabolique permet de le simplifier en un coup d'oeil : multiplions-le donc par $\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$! En effet, en utilisant n fois de suite la

formule de duplication $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$, on va trouver $\cos(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\times\cdots\times \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\times\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\cos(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\times\cdots\times\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)\times\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right) = \cdots = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(\theta)\sin(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2^n}$. On en déduit que $r_n = \frac{r\sin(2\theta)}{2^n}$ (on peut faire une belle récurrence si on veut être plus rigoureux que ce que je n'ai fait).

4. Les deux suites (r_n) et (θ_n) ont une limite nulle, ce qui suffit à prouver que la suite (z_n) tend vers 0 (si on tient à faire réapparaitre les parties réelle et imaginaire, il suffit de constater qu'elles sont respectivement égales à $r_n\cos(\theta_n)$ et à $r_n\sin(\theta_n)$ pour conclure aisément).

Exercice 23 (***)

1. Calculons donc $\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\psi$, ce qui prouve l'égalité demandée.
2. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et admet comme racines $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \psi$. On peut donc écrire $F_n = 1\varphi^n + B\psi^n$. Les conditions initiales donnent $F_0 = A + B = 0$, donc $B = -A$, et $F_1 = A\varphi + B\psi = 1$, donc $A = \frac{1}{\varphi - \psi} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On a donc $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.
3. Commençons par donner les premiers termes de la suite (F_n) : $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$ et $F_6 = 8$, donc $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = \frac{3}{2}$, $u_4 = \frac{5}{3}$ et $u_5 = \frac{8}{5}$.
4. On calcule bien sûr $u_{n+1} - u_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n+1}+F_n}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{1 + u_n - u_n^2}{u_n}$. Le dénominateur est bien sûr positif (par une récurrence triviale, tous les termes de chacune des suites (F_n) et (u_n) sont strictement positifs), et le numérateur s'annule en φ et en ψ (c'est l'équation qu'on a résolue plus haut). Puisque $u_n > 0$ et $\psi < 0$, $u_{n+1} - u_n$ sera positif à l'intérieur des racines du numérateur, donc si $u_n \leqslant \varphi$, et négatif sinon. En fait, on est capable de dire si $u_n \leqslant \varphi$ en utilisant la formule explicite donnée à la question précedente : $u_n = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n}$. En effet, ψ étant négatif, ψ^n est alternativement positif et négatif, ce qui signifie que, si n est pair, le numérateur est inférieur à φ^{n+1}, et le dénominateur supérieur à φ^n, donc le quotient inférieur à φ. De la même façon, si n est impair, $u_n \geqslant \varphi$. On en déduit que $u_{n+1} \geqslant u_n$ si n est impair, mais $u_{n+1} \leqslant u_n$ si n est pair (ce qui est tout à fait cohérent avec les premières valeurs de la suite que nous avons calculées).
5. Factorisons notre quotient par les puissances de φ : $u_n = \frac{\varphi^{n+1}(1 - (\frac{\psi}{\varphi})^{n+1})}{\varphi^n(1 - (\frac{\psi}{\varphi})^n)} = \varphi \times \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha^n}$, en posant $\alpha = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$. Ce réel est certainement compris entre -1 et 1, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \varphi$.
6. On reprend pratiquement un calcul déjà fait : $u_{n+1} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_n} = 1 + \frac{1}{u_n}$. La fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, et coupe la droite d'équation $y = x$ pour $x = \varphi$ (c'est encore et toujours la même équation), ce qui permet de dessiner le bel escargot suivant pour représenter les termes de la suite (u_n) :



7. D'après le calcul effectué pour déterminer la limite de (u_n), $u_n - \varphi = \varphi\left(\dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha^n} - 1\right) = \varphi \times \dfrac{\alpha^n(\alpha-1)}{1-\alpha^n}$. Or, $\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha^n} = \dfrac{\psi^n}{\varphi^n} \times \dfrac{\varphi^n}{\varphi^n - \psi^n} = \dfrac{\psi^n}{\sqrt{5}F_n}$; et $\alpha - 1 = \dfrac{\psi - \varphi}{\varphi}$. Finalement, $u_n - \varphi = \dfrac{(\psi-\varphi)\psi^n}{\sqrt{5}F_n} = \dfrac{-\psi^n}{F_n}$. Comme $-\psi^n = -\left(-\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$, on obtient bien, en valeur absolue, $|u_n - \varphi| = \dfrac{1}{\varphi^n F_n}$.
8. Il suffit pour cela de constater que $\varphi^n \leqslant F_n$. Si n est pair, c'est évident, puisque $F_n \leqslant \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, mais même dans le cas où n est impair, $\varphi^n - \psi^n \leqslant 2\varphi^n$ puisque $|\psi| < \varphi$, donc $F_n \leqslant \dfrac{2\varphi^n}{\sqrt{5}} < \varphi^n$.
9. Il faut trouver une valeur de F_n telle que $F_n^2 > 10^4$, donc $F_n \geqslant 100$. Un calcul légèrement laborieux nous mène à trouver $F_{12} = 144$. On a alors $u_{12} = \dfrac{233}{144}$ qui est une valeur approchée de φ à 10^{-4} près par excès puisque tous les termes d'indice pair de la suite sont plus grands que φ. Une passionnante division « à la main » permet d'obtenir que $\dfrac{233}{144} \simeq 1.61806$, et les plus courageux vérifieront de même que $u_{13} = \dfrac{377}{233} > 1.6180$, ce qui permet d'affirmer que 1.6180 et 1.6181 sont les valeurs approchées de φ à 10^{-4} près par défaut et par excès.
10. Faisons donc une petite démonstration par récurrence double, par exemple en fixant la valeur de n et en faisant varier p (on ne peut pas faire varier les deux à la fois). On pose donc $\mathcal{P}_p$: $F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}$. Au rang 0, la propriété stipule simplement que $F_n = F_{n-1}F_0 + F_nF_1$, ce qui est vrai puisque $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. De même au rang 1 : $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ est vraie par définition de la suite de Fibonacci. Supposons la propriété vraie aux rangs p et $p+1$, alors $F_{n+p+2} = F_{n+p+1} + F_{n+p} = F_{n-1}F_{p+1} + F_nF_{p+2} + F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1} = F_{n+1}(F_p + F_{p+1}) + F_n(F_{p+1} + F_{p+2}) = F_{n+1}F_{p+2} + F_nF_{p+3}$, ce qui est exactement la propriété $\mathcal{P}_{p+2}$. La propriété est donc vrai pour tout entier p. En particulier, en posant $n = p+1$, on obtient $F_{2p+1} = F_p^2 + F_{p+1}^2$, ce qui prouve effectivement que les termes d'indice impair de la suite sont sommes de deux carrés.

11. Et si on faisait une nouvelle récurrence ? Au rang 0, on a $\sum_{k=0}^{0} F_k = 0$, et $F_2 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc la propriété est vraie. Supposons la vérifiée au rang n, alors $\sum_{k=0}^{n+1} F_k = F_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1} + F_{n+2} - 1 = F_{n+3} - 1$ en utilisant la relation de récurrence définissant la suite (F_n). cela prouve que la propriété reste vraie au rang $n+1$, et achève la récurrence.

12. La question est bizarrement formulée, puisqu'elle donne la valeur de la suite juste avant de la demander. Bref, jamais deux sans trois, on va faire une belle récurrence. Au rang 1 (le rang 0 n'est pas vraiment pertinent vu le F_{n-1} qui traine dans la formule), on a $F_2F_0 - F_1^2 = -1$, ça marche. Supposons la formule vérifiée au rang n, alors au rang suivant $F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 = F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.

13. Pour comparer les deux nombres, calculons leur tangente : à droite, c'est facile, ça vaut bien évidemment 1. À gauche, c'est à peine plus compliqué, mais il faut bien sûr se souvenir de ses formules d'addition de tangente : $\tan\left(\arctan\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right) - \arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right)\right) = \frac{\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_n}{F_{n+3}}}{1 + \frac{F_{n+2}F_n}{F_{n+1}F_{n+3}}} = \frac{F_{n+2}F_{n+3} + F_{n+1}F_n}{F_{n+1}F_{n+3} - F_{n+2}F_n} = \frac{F_{n+2}(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_{n+1}(F_{n+2} - F_{n+1})}{F_{n+2}^2 + (-1)^{n+2} + F_{n+1}^2 - (-1)^{n+1}} = \frac{F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2}{F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2} = 1$. Les deux membres ont donc la même tangente, ils sont égaux à π près. Mais comme $0 < \frac{F_n}{F_{n+3}} < 1$, on a certainement $0 < \arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right) < \frac{\pi}{4}$. L'autre arctangente étant pour le même genre de raison comprise entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, la différence des deux est (strictement) comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et donc bien égale à $\frac{\pi}{4}$. On obtient ainsi toute une série de formules palpitants, comme par exemple $\arctan\left(\frac{55}{34}\right) - \arctan\left(\frac{21}{89}\right) = \frac{\pi}{4}$. Étonnant, non ?

Exercice 24 (***)

1. Calculons donc : $p_0 = 1$, $q_0 = 1$, $p_1 = 2 + 1 = 3$, $q_1 = 2$, puis on applique les relations de récurrence : $p_2 = 2p_1 + p_0 = 7$, $q_2 = 2q_1 + q_0 = 5$, $p_3 = 2p_2 + p_1 = 17$, $q_3 = 2q_2 + q_1 = 12$, $p_4 = 2p_3 + p_2 = 41$ et $q_4 = 2q_3 + q_2 = 29$. On en déduit que $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{7}{5}$, $x_3 = \frac{17}{12}$ et $x_4 = \frac{41}{29}$. si on est courageux, on peut pousser jusqu'à évaluer $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.4$, $x_3 \simeq 1.4167$ et $x_4 \simeq 1.4138$, ce qui est cohérent avec les propriétés démontrées plus loin sur la suite (x_n). Les plus réveillés se rendront peut-être même compte que la suite (x_n) semble converger vers une valeur qui pourrait bien être $\sqrt{2}$ (cf question 9.c).

2. Récurrence double triviale : c'est vrai pour q_0 et q_1 par hypothèse, et si on suppose $q_n \geqslant n$ et $q_{n+1} \geqslant n+1$, alors $q_{n+2} \geqslant q_{n+1} + q_n \geqslant 2n+1$, ce qui est largement plus fort que ce qu'on doit prouver.

3. Essayons de simplifier à l'aide de la relation de récurrence : si $n \geqslant 1$, on peut écrire $p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$ et de même pour q_{n+1}, donc $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = a_{n+1}p_nq_n + p_{n-1}q_n - a_{n+1}q_np_n - q_{n-1}p_n = -(p_nq_{n-1} - q_np_{n-1})$. Autrement dit, en posant $u_n = p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison -1. Comme $u_0 = p_1q_0 - q_1p_0 = a_0a_1 + 1 - a_1a_0 = 1$, on aura simplement $u_n = (-1)^n$.

   On calcule de même $p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n = a_{n+1}p_{n+1}q_n + p_nq_n - a_{n+1}q_{n+1}p_n - q_np_n = a_{n+1}(p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n) = (-1)^n a_{n+1}$ d'après le calcul précédent.

4. Par définition, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n}{q_n q_{n+1}} = \dfrac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$. De même, $x_{n+2} - x_n = \dfrac{p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n}{q_n q_{n+2}} = \dfrac{(-1)^n a_{n+1}}{q_n q_{n+2}}$.
5. D'après la question précédente, $x_{2n+2} - x_{2n} = \dfrac{a_{2n+1}}{q_{2n}q_{2n+2}} > 0$ puisque les suites (a_n) et (q_n) sont à valeurs positives. De même, $x_{2n+3} - x_{2n+1} = -\dfrac{a_{2n+2}}{q_{2n+1}q_{2n+3}} < 0$, donc la suite (x_{2n}) est croissante et la suite (x_{2n+1}) décroissante (c'est cohérent avec les quelques valeurs calculées à la première question de l'exercice). Ensuite, $x_{2n+1} - x_{2n} = \dfrac{1}{q_{2n}q_{2n+1}} \leqslant \dfrac{1}{2n(2n+1)}$ d'après la question 2, ce qui suffit largement à prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} - x_{2n} = 0$ (théorème des gendarmes, puisque cet écart est positif vu son expression). Les deux suites sont bien adjacente, et convergent donc vers une même limite. Cela suffit à affirmer que la suite (x_n) converge elle-même vers cette limite commune (théorème du cours).
6. Par définition, $x_1 = \dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{a_0a_1+1}{a_1} = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$. De même, $x_2 = \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{a_2p_1+p_0}{a_2q_1+q_0} = \dfrac{a_2a_0a_1 + a_2 + a_0}{a_2a_1+1} = a_0 + \dfrac{a_2}{a_2a_1+1} = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$, qui est bien la formule souhaitée.
7. On peut s'en sortir à l'aide d'une simple récurrence un peu astucieuse : notons P_n la propriété qui affirme que (x_n) a la forme donnée dans l'énoncé **quelle que soit la suite** (a_n) **définissant les suites** (p_n)**,** (q_n) **et** (x_n). La propriété P_0 est manifestement vraie puisqu'elle stipule que $x_0 = a_0$, ce qui découle immédiatement de la définition des valeurs de p_0 et de q_0. Supposons maintenant la formule vraie au rang n. Au lieu d'appliquer l'hypothèse de récurrence, on va l'appliquer à la suite (a'_n) définie par : $\forall k < n$, $a'_k = a_k$ et $a'_n = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$ (et peu importe ce qu'on fait pour les termes suivants, on n'en aura pas besoin pour prouver l'hérédité). On notera y_n l'équivalent de x_n défini à partir de la suite (a'_n). Puisque la propriété P_n est supposée vraie pour toute suite, on peut alors affirmer que $y_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a'_n}}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n+1}}}}}$. Il suffit donc de prouver que $x_{n+1} = y_n$ pour que l'hérédité de notre récurrence soit prouvée. Or, $x_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}}$. Avec la définition donnée pour a'_n, on peut écrire $a_{n+1} = \dfrac{1}{a'_n - a_n}$, remplaçons dans l'expression de x_{n+1}, en multipliant numérateur et dénominateur par $a'_n - a_n$: $x_{n+1} = \dfrac{p_n + (a'_n - a_n)p_{n-1}}{q_n + (a'_n - a_n)q_{n-1}}$. Remplaçons désormais p_n et q_n en appliquant la relation de récurrence définissant les deux suites pour trouver $x_{n+1} = \dfrac{a_np_{n-1} + p_{n-2} + (a'_n - a_n)p_{n-1}}{a_nq_{n-1} + q_{n-2} + (a'n - a_n)q_{n-1}} = \dfrac{a'np_{n-1} + p_{n-2}}{a'_nq_{n-1} + q_{n-2}}$. Or, ce quotient est exactement égal à y_n (en notant $p'n$ et $q'n$ les équivalents de p_n et q_n pour la suite (a'_n), numérateur et dénominateur sont simplement égaux à p'_n et q'_n puisque $p_{n-2} = p'_{n-2}$ et $q_{n-2} = q'_{n-2}$). On a bien prouvé que $x_{n+1} = y_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n+1}}}}}$.
8. Puisque les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont adjacentes de limite commune α, avec de plus $x_{2n} < x_{2n+1}$, on peut affirmer que $x_0 < \alpha < x_1$. Comme par ailleurs $x_0 = a_0 \in \mathbb{N}$ et $x_1 - x_0 = \dfrac{1}{a_1} \leqslant 1$ (puisque a_1 est lui-même entier), on a donc $a_0 < \alpha < a_0 + 1$, ce qui suffit à affirmer que $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$.
9. (a) Manifestement, $\alpha_n = a_n + \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$ (il n'y pas grand chose à justifier, c'est la définition même

de α_n).

(b) On peut simplement effectuer un calcul par récurrence : une fois connues les valeurs de a_n et de α_n, on calcule d'abord $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n}$ (relation de la question précédente), puis on peut ensuite calculer $a_{n+1} = \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor$ (c'est le même principe que pour le calcul de a_0, il suffit de constater que α_{n+1} est toujours supérieur ou égal à 1, ce qui est évident vu sa définition puisqu'on ajoute à un entier non nul a_{n+1} une fraction manifestement positive). Comme on connait les valeurs de $\alpha_0 = \alpha$ et de a_0 (question précédente), on peut initialiser sans problème le calcul.

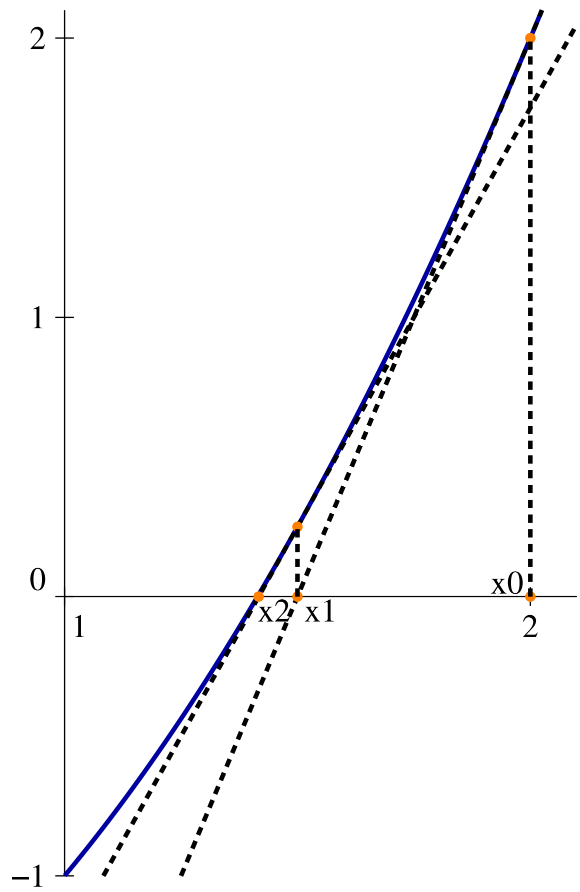
(c) Calculons donc : $a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, puis $\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha_0 - a_0} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ (mutliplication par la quantité conjuguée). On en déduit $a_1 = \lfloor \sqrt{2}+1 = 2$, puis $\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1 - a_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$. Inutile de pousser plus loin les calculs, on aura désormais $a_n = 2$ puis $\alpha_{n+1} = \sqrt{2}+1$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

(d) On vient de le dire : $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1$, $a_n = 2$. Oh mais ne serait-ce point par hasard le cas particulier étudié en question 1 ? Quel hasard exatrordinaire. On a donc prouvé indirectement que ce cas particulier donne une suite (x_n) convergeant vers $\sqrt{2}$, ou si on préfère que $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}$. Étonnant, non ?

(e) On part donc cette fois-ci de $\alpha = \sqrt{3}$, et on calcule de même : $a_0 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$, puis $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \simeq 1.4$. On continue : $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 1$, donc $\alpha_2 = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 \simeq 2.7$. Bon, les calculs ne semblent jusqu'ici pas se répéter mais ça va venir : $a_2 = 2$, donc $\alpha_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \alpha_1$. À partir de là, les calculs vont boucler périodiquement : $\alpha_n = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ si n est impair, $\alpha_n = \sqrt{3}+1$ si n est pair (non nul), donc $a_{2n+1} = 1$ et $a_{2n} = 2$ (sauf pour $n = 0$). Autrement dit, $\sqrt{3} = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\dots}}}}$.

Problème 1 : autour de la méthode de Newton (**)

1. On se limitera aux tout premiers termes de la suite sur le dessin, pour la bonne raison que la suite converge tellement rapidement qu'en pratique, on n'y voit très vite plus rien ! Ici, on a pris un exemple hyper classique qui est justement celui illustré (dans un cadre un peu plus général) dans la suite de l'exercice : $f(x) = x^2 - 2$ (qui s'annule bien entendu pour $x = \sqrt{2}$), et $x_0 = 2$ (on pourra considérer que l'intervalle I est ici l'intervalle $[0, 2]$. On calcule alors aisément (par exemple en utilisant les formules démontrées ensuite dans l'exercice, c'est de toute façon l'objet de la question 5.a) que $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_2 = \dfrac{17}{12}$, puis $x_3 = \dfrac{577}{408}$ (non indiqué sur le dessin) :



2. La tangente à la courbe de f en son point d'abscisse x_n a pour équation $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$. Par définition, x_{n+1} représente la valeur de x pour laquelle $y = 0$ dans cette équation (intersection avec l'axe des abscisses), donc $0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$, ce qui donne bien $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

3. (a) Dans ce cas, on a $f(x_n) = x_n^2 - a$ et $f'(x_n) = 2x_n$, donc en reprenant la formule de la question précédente $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - a}{2x_n} = \dfrac{x_n^2 + a}{2x_n}$.

   (b) Étudions donc g, qui est définie et dérivable sur I, de dérivée $g'(x) = \dfrac{4x^2 - 2x^2 - 2a}{4x^2} = \dfrac{x^2 - a}{2x^2}$. En particulier, cette dérivée s'annule lorsque $x = \sqrt{a}$, valeur pour laquelle on a $g(\sqrt{a}) = \dfrac{a + a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant (les limites étant évidentes à calculer) :

x	0	$\sqrt{a}$	$+\infty$
g	$+\infty$ ↘	$\sqrt{a}$	↗ $+\infty$

   Passons à l'étude de la fonction h, dont la dérivée vaut $h'(x) = g'(x) - 1 = \dfrac{x^2 - a}{2x^2} - 1 = -\dfrac{x^2 + a}{2x^2} < 0$ sur tout l'intervalle I. La fonction h est donc strictement décroissante sur I, et on a sans difficulté $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$, et comme $h(x) = \dfrac{x^2+a}{2x} - x = \dfrac{a-x^2}{2x}$, on calcule $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ (par exemple en utilisant la règle du quotient des termes de plus haut degré). Remarquons en passant que, comme $g(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$, on a $h(\sqrt{a}) = 0$, la fonction h est donc positive sur l'intervalle $]0, \sqrt{a}]$ et négative sur $[a, +\infty[$.

(c) Par définition, on a $x_{n+1} - x_n = g(x_n) - x_n = h(x_n)$, dont le signe dépend de la position de x_n par rapport à $\sqrt{a}$. Or, le tableau de variations de la fonction g obtenu à la question précédente prouve que g est minorée sur I par $\sqrt{a}$, donc que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n) \geqslant \sqrt{a}$. La suite (x_n) est donc bien minorée par $\sqrt{a}$ (au moins à partir du rang 1, mais en fait on a aussi$x_0 = a \geqslant \sqrt{a}$ puisqu'on a supposé $a > 1$), et par conséquent décroissante puisqu'on a toujours $h(x_n) \leqslant 0$. Le théorème de convergence monotone assure alors que la suite (x_n) converge nécessairement vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Bien entendu, on aura alors aussi $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = l$, mais aussi $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2+a}{2x_n} = \dfrac{l^2+a}{2l}$ (la limite l étant supérieure ou égale à $\sqrt{a}$ ne peut être nulle). Par conséquent, on doit avoir (en reprenant l'égalité prouvée à la question 3.*a*) $l = \dfrac{l^2+a}{2l}$, soit $l^2 = a$, et donc $l = \sqrt{a}$ puisque l est nécessairement positive.

4. (a) C'est un calcul direct : $v_{n+1} = \dfrac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{x_{n+1}+\sqrt{a}} = \dfrac{\frac{x_n^2+a}{2x_n}+\sqrt{a}}{\frac{x_n^2+a}{2x_n}+\sqrt{a}} = \dfrac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a}+a}{x_n^2+2x_n\sqrt{a}+a} = \dfrac{(x_n-\sqrt{a})^2}{(x_n+\sqrt{a})^2} = v_n^2$.

(b) À partir du résultat de la question précédente, on montre facilement par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (v_0)^{2^n}$. C'est bien entendu vrai au rang $n = 0$ puisque $(v_0)^{2^0} = v_0^1 = v_0$, et si on suppose la propriété vraie au rang n, alors $v_{n+1} = v_n^2 = \left((v_0)^{2^n}\right)^2 = (v_0)^{2^{n+1}}$, ce qui prouve bien l'hérédité. On déduit de cette égalité et de la définition de la suite v_n que $|x_n - \sqrt{a}| = |x_n + \sqrt{a}| \times v_0^{2^n}$ (on sait que v_0 est un nombre positif). Il suffit alors de constater que $x_n + \sqrt{a} \leqslant x_0 + \sqrt{a} \leqslant 2x_0$ pour conclure (puisque la suite (x_n) est décroissante de premier terme $x_0 = a$).

5. (a) La relation de la question 3.*a* peut se réécrire dans ce par particulier $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+2}{2x_n} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$. À partir de $x_0 = 2$, on calcule donc successivement $x_1 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$; $x_2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{9+8}{12} = \dfrac{17}{12}$ et enfin $x_3 = \dfrac{17}{24} + \dfrac{12}{17} = \dfrac{289+288}{408} = \dfrac{577}{408}$ (oui, quatre premiers termes, ça s'arrête bien à x_3).

(b) On applique bien sûr l'inégalité démontrée en question 4.*b* : $2x_0 = 4$, et $v_0 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} < \dfrac{1}{3}$, puisque $2 - \sqrt{2} < 1$ et $2 + \sqrt{2} > 3$. Cela suffit à obtenir la majoration souhaitée.

(c) Il suffit d'après la question précédente d'avoir $\dfrac{4}{3^{(2^n)}} \leqslant 10^{-6}$, soit $3^{2^n} \geqslant 4\ 000\ 000$. Or, $3^2 = 9$, $3^4 = 81$, $3^8 = 81^2 = 6\ 561$, et le carré de ce dernier nombre est déjà bien supérieur à 4×10^6, donc $n = 4$ suffit. La suite (x_n) converge en fait très très vite vers $\sqrt{2}$.

Problème 2 : autour de la série harmonique (***)

1. (a) Une question triviale pour commencer en douceur : $H_{n+1} - H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$, donc la suite (H_n) est strictement croissante.

(b) Commençons par calculer $H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Cette dernière somme est constituée de n termes, et chacun d'entre eux est supérieur ou égal à $\frac{1}{2n}$, donc la somme est bien supérieure ou égale à $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

(c) La suite étant croissante, si elle était majorée, elle convergerait nécessairement vers une limite l. Mais alors on aurait $\lim_{n \to +\infty} H_{2n} - H_n = l - l = 0$, ce qui est complètement incompatible avec le résultat démontré à la question précédente. La suite ne peut donc pas être majorée, ce qui implique qu'elle diverge vers $+\infty$.

2. (a) Calculons donc : $u_1 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $u_2 = \sum_{k=2}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$; $u_3 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{19}{20}$. La suite (u_n) semble décroissante. De l'autre côté, $v_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}$; $v_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2+k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, et $v_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3+k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$. Cette deuxième suite semble croissante.

(b) Commençons par étudier la monotonie des deux suites : $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{n(2n+1) + n(2n+2) - (2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} = \frac{2n^2 + n + 2n^2 + 2n - 4n^2 - 6n - 2}{n(2n+1)(2n+2)}$ $\frac{-2}{n(2n+2)} < 0$, donc la suite (u_n) est bien décroissante. De l'autre côté, $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$, donc (v_n) est décroissante.

Enfin, en effectuant un changement d'indice $j = k + n$ (on peut, n est une valeur fixée), on a $v_n - u_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = -\frac{1}{2n}$, qui a certainement une limite nulle. Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite.

3. (a) La méthode suggérée par l'énoncé consiste à constater que, $\forall x \in [k, k+1]$, on a l'encadrement $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$ (décroissance de la fonction inverse). Comme l'encadrement est valable sur tout l'intervalle, on peut intégrer les inégalités pour écrire $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx$. Les deux intégrales à gauche et à droite sont des intégrales de constates sur un intervalle de largeur 1, elles valent donc respectivement $\frac{1}{k+1}$ et $\frac{1}{k}$. Et, bien sûr, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = [\ln(x)]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k)$, dont découle l'encadrement demandé.

Méthode plus rustique : on pose $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$, la fonction f est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante. Or, $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ a une limite nulle quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que f est toujours positive.

On recommence ensuite avec $g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln(x)$, avec cette fois $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2(x+1)} < 0$. Encore une fonction décroissante à limite nulle en $+\infty$ (calcul très similaire au précédent), donc positive sur $]0, +\infty[$.

(b) Si on reprend l'inégalité de droite de l'encadrement précédent et qu'on la somme pour les valeurs de k comprises entre 1 et n, on trouve $\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, donc $\ln(n+1) - \ln(1) \leqslant H_n$ (la somme de gauche est télescopique), c'est bien la première moitié de l'encadrement demandé pour H_n. Pour obtenir la moitié de droite, décalons les indices dans l'inégalité de gauche de l'encadrement de la question a : si $k \geqslant 2$, on peut écrire $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$. Là encore, on va sommer ces inégalités, mais on ne peut le faire qu'à partir de $k = 2$: $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1)$, ce qui donne $H_n - 1 \leqslant \ln(n)$ (il manque le premier terme dans la somme de gauche pour reconnaitre H_n), ce qui implique bien $H_n \leqslant \ln(n) + 1$.

(c) Commençons par étudier les monotonies : $a_{n+1} - a_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leqslant 0$ d'après l'inégalité de gauche de l'encadrement de la question a. La suite (a_n) est donc décroissante. De même, $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \geqslant 0$ (c'est l'inégalité de droite de l'encadrement de la question a, mais décalé d'une unité). La suite (b_n) est donc croissante. Enfin, $a_n - b_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ a une limite nulle. Les deux suites sont donc adjacentes, elles convergent vers une même limite.

(d) En effet, en reprenant le changement d'indice de la question 2.c, $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n$. Comme on sait que $\ln(2n) = \ln(2) + \ln(n)$, on peut faire une astuce belge étonnante en écrivant $v_n = H_{2n} - \ln(2n) + \ln(n) - H_n + \ln(2)$. Or, $\lim_{n \to +\infty} H_n - \ln(n) = \gamma$ (question précédente), et donc $\lim_{n \to +\infty} H_{2n} - \ln(2n) = \gamma$ également. Il ne reste donc plus que $\lim_{n \to +\infty} v_n = \gamma - \gamma + \ln(2) = \ln(2)$. Ce genre de calcul pourra être écrit de façon beaucoup plus naturelle quand nous aurons étudié la négligeabilité et les notations qui vont avec.

Problème 3 (***)

1. On part donc de $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ avant d'appliquer la relation de récurrence : $u_2 = \frac{1}{2}(1^2 + 0^2) = \frac{1}{2}$, puis $u_3 = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$ et enfin $u_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{64}\right) = \frac{17}{128}$ (oui, cinq termes, ça s'arrête bien à u_4 quand on part de u_0).

2. (a) Si (u_n) est constante égale à k (avec bien sûr $k \geqslant 0$), la relation de récurrence implique que $k = \frac{1}{2}(k^2 + k^2)$, donc que $k = k^2$, ce qui implique $k = 0$ ou $k = 1$. Réciproquement les deux suites constantes égales à 0 et à 1 sont bien des éléments de $\mathcal{S}$.

(b) Supposons donc que, pour un certain entier n, on ait $u_n = u_{n+1} = 1$, alors on démontre par récurrence double que, $\forall p \geqslant n$, $u_p = 1$ (c'est le cas aux rangs n et $n+1$ par hypothèse, ce qui donne l'initialisation de la récurrence double ; et si on suppose $u_k = u_{k+1} = 1$ pour un certain entier $k \geqslant n$, alors $u_{k+2} = \frac{1}{2}(1^2 + 1^2) = 1$, ce qui prouve l'hérédité). Il faut toutefois aussi prouver que les termes d'indice inférieur à n sont aussi égaux à 1 si on veut la suite soit réellement constante. Supposons que ce ne soit pas toujours le cas, et notons

n_0 le plus grand entier tel que $u_{n_0} \neq 1$. On a alors par définition de n_0, $u_{n_0+1} = u_{n_0+2} = 1$, donc en appliquant la relation de récurrence définissant u_n au rang n_0, $1 = \frac{1}{2}(1 + u_{n_0}^2)$, donc $u_{n_0}^2 = 1$. Tous les termes de la suite (u_n) étant positifs (récurrence double triviale si on tient à être rigoureux), on a nécessairement $u_{n_0} = 1$, ce qui contredit notre hypothèse et prouve par conséquent que tous les termes de notre suite sont bien égaux à 1.

(c) Supposons donc qu'un certain terme u_n soit égal à 0, avec $n \geqslant 2$. Alors $u_n = 0 = \frac{1}{2}(u_{n-2}^2 + u_{n-1}^2)$, ce qui implique manifestement que $u_{n-1} = u_{n-2} = 0$ (une somme de carrés ne pouvant être nulle que si chacun de ses termes est nul). Comme à la question précédente, ce raisonnement peut s'étendre pour prouver que tous les termes d'indice inférieur à n sont eux aussi nuls, et on prouve ensuite par récurrence double que la suite est entièrement nulle.

3. Supposons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$, alors bien entendu on a aussi $\lim u_{n+2} = l$ et $\lim u_{n+1}^2 = \lim u_n^2 = l^2$, et la relation de récurrence définissant (u_n) implique que $l = \frac{1}{2}(l^2 + l^2)$. C'est la même équation qu'à la question 2.a, on en déduit que $l = 0$ ou $l = 1$.

4. (a) Supposons donc, en plus des hypothèses $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$, que $b < 1$, alors $0 \leqslant b^2 \leqslant b < 1$, et bien entendu on a aussi $a^2 \leqslant b^2 \leqslant b$ par croissance de la fonction carré sur $[0,1[$. On en déduit que $\frac{a^2+b^2}{2} \leqslant \frac{2b}{2} = b$, ce qui contredit les hypothèses initiales sauf si toutes nos inégalités sont des égalités. C'est le cas uniquement si $a^2 = b^2 = b = 0$, donc $a = b = 0$.

(b) Puisque $\frac{a^2+b^2}{2} \leqslant a$, on peut écrire $a^2 + b^2 - 2a \leqslant 0$, donc $(a-1)^2 - 1 + b^2 \leqslant 0$, ou encore $b^2 \leqslant 1 - (a-1)^2 \leqslant 1$ (puisqu'un carré est bien sûr positif). Ceci suffit à affirmer que $b \leqslant 1$.

5. Calculons donc $u_{n+3} - u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2) - \frac{1}{2}(u_n^2 + u_{n+1}^2) = \frac{u_{n+2}^2 - u_n^2}{2}$, qui est du même signe que $u_{n+2}^2 - u_n^2$, et donc du même signe que $u_{n+2} - u_n$ puisque ces deux nombres sont positifs (si on le souhaite, on factorise sous la forme $(u_{n+2} - u_n)(u_{n+2} + u_n)$ pour rendre la preuve plus évidente).

6. (a) Cela découle de façon évidente de la question précédente : puisque $u_{n+2} - u_n > 0$, alors $u_{n+3} - u_{n+2} > 0$, ce qui suffit à prouver ce qui est demandé.

(b) Prouvons par récurrence double la propriété $u_k \leqslant u_{k+1}$ à partir du rang $n+1$. L'initialisation double découle de la question précédente, supposons alors que $u_k \leqslant u_{k+1}$ et $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$ pour un certain entier $k \geqslant n+1$. On peut à nouveau appliquer la question a pour en déduire que $u_{k+2} \leqslant u_{k+3}$, ce qui prouve l'hérédité de la propriété et la croissance de la suite à partir du rang $n+1$. Supposons désormais que la suite n'est pas strictement croissante à partir du rang $n+3$ (précision omise dans l'énoncé, on ne peut rien dire sur les termes d'indice $n+1$, $n+2$ et $n+3$ de plus qu'une simple croissance au sens large), alors il existe donc un entier $p \geqslant n+3$ tel que $u_p = u_{p+1}$ (une suite croissante qui ne l'est pas strictement contient au minimum deux termes consécutifs égaux). En appliquant la question 5, on en déduit alors que $u_{p-2} = u_p$, et donc également que $u_{p-1} = u_p$ par croissance de la suite. La suite contient donc trois termes (et même quatre) consécutifs égaux, la valeur de ces termes ne peut être que 0 ou 1 (calcul déjà effectué deux ou trois fois), et on a démontré à la question 2 que la suite était constante dans ces deux cas.

(c) Posons $a = u_{n+1}$ et $b = u_{n+2}$. Par hypothèse, $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+3}$, soit $a \leqslant b \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$. Sachant que b n'a pas le droit d'être nul (sinon toute la suite l'est, question 2.c), la question 4.a permet d'affirmer que $b = u_{n+2} \geqslant 1$.

(d) En éliminant les suites constantes, la suite est strictement croissante à partir du rang $n+3$, et va d'après la question précédente prendre des valeurs strictement supérieures à 1. Si elle converge, c'est donc vers une limite elle-même strictement supérieure à 1, ce qui est exclu par la question 3. Étant croissante (à partir d'un certain rang), la suite ne peut donc que diverger vers $+\infty$.

7. Ce sont exactement les mêmes étapes quà la question précédente : on prouve d'abord que $u_{n+3} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ en utilisant la question 5. Ensuite, on prouve par récurrence double que la suite est décroissante à partir du rang $n+1$ (exactement la même récurrence que ci-dessus en changeant le sens des inégalités), puis que la suite est strictement décroissante à partir du rang $n+3$ (encore une fois, c'est pareil). Enfin, on applique la question 4.b avec $a = u_{n+2}$, $b = u_{n+1}$ et $\dfrac{a^2+b^2}{2} = u_{n+3}$, et on en déduit que $u_{n+1} \leqslant 1$, et donc $u_{n+3} \leqslant 1$. La suite étant ensuite strictement décroissante et minorée par 0, elle converge nécessairement, et sa limite est nulle puisqu'elle ne peut pas être égale à 1.

8. Calculons les premiers termes de la suite $(u_n(\sqrt{2}, 0))$: $u_2 = \dfrac{1}{2}(2+0) = 1$, puis $u_3 = \dfrac{1}{2}(0+1) = \dfrac{1}{2}$, $u_4 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{5}{8}$ et $u_5 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{25}{64}\right) = \dfrac{41}{128}$. On peut s'arrêter là : $u_5 \leqslant u_4$ et $u_5 \leqslant u_3$, donc la suite converge vers 0 d'après la question 7.

   On fait pareil pour $(u_n(2, 0))$: $u_2 = \dfrac{1}{2}(4+0) = 2$, puis $u_3 = 2$ (même calcul !), donc u_3 est supérieur à la fois à u_1 et à u_2 et la suite diverge vers $+\infty$ (question 6).

9. (a) Effectuons un raisonnement par l'absurde en supposant que $u_1 = u_0$. On distingue alors trois cas selon la valeur de u_2 :
   - si $u_2 = u_1$, on a trois termes consécutifs égaux, et la suite est constante, cas exclu par l'énoncé.
   - si $u_1 < u_2$, alors la question 6 assure que la suite va diverger vers $+\infty$, cas également exclu.
   - enfin, si $u_1 > u_2$, la question 7 assure cette fois-ci que la suite va converger vers 0, ce qui n'est pas non plus autorisé.

   On doit bien avoir $u_1 \neq u_0$.

   (b) Exactement le même principe qu'à la question précédente, on exclut les autres possibilités :
   - si $u_{n+2} = u_{n+1}$, la position de u_{n+3} par rapport à ces deux valeurs identiques donnera exactement les trois mêmes cas qu'à la question précédente (suite constante, divergeant vers $+\infty$, ou convergeant vers 0), qui sont exclus tous les trois. On en déduit que $u_{n+2} \neq u_{n+1}$.
   - si $u_{n+2} < u_{n+1}$, on ne peut pas avoir $u_{n+2} \leqslant u_n$, sinon la suite convergerait vers 0 (question 7), donc $u_n < u_{n+2} < u_{n+1}$.
   - si au contraire $u_{n+1} < u_{n+2}$, on ne peut pas avoir $u_n \leqslant u_{n+2}$, sinon la suite divergerait vers $+\infty$ (question 6), donc cette fois $u_{n+1} < u_{n+2} < u_n$.

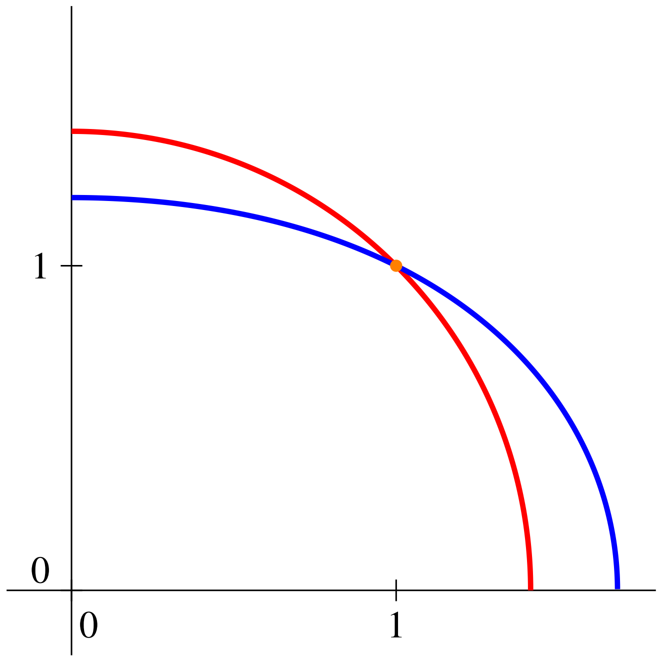
   (c) On peut effectuer une récurrence en appliquant la question précédente pour prouver que, pour tout entier n, on va avoir $u_{2n} < u_{2n+2} < u_{2n+1}$ et $u_{2n+2} < u_{2n+3} < u_{2n+1}$. Au rang 0, l'encadrement $u_0 < u_2 < u_1$ découle de la question précédente, puis l'inégalité $u_2 < u_1$ implique (toujours en utilisant la question précédente) que $u_2 < u_3 < u_1$. Supposons maintenant les inégalités vraies au rang n, on part alors de $u_{2n+2} < u_{2n+3}$ pour en déduire que $u_{2n+2} < u_{2n+4} < u_{2n+3}$ puis (en gardant l'inégalité de droite de l'encadrement précédent) que $u_{2n+4} < u_{2n+5} < u_{2n+3}$, ce qui prouve les deux encadrements souhaités au rang $n+1$. On a en particulier prouvé qu'on avait toujours $u_{2n} < u_{2n+2}$ et $u_{2n+3} < u_{2n+1}$, donc la sous-suite (u_{2n}) est strictement croissante, et la sous-suite (u_{2n+1}) strictement décroissante. Comme on a toujours $u_{2n} < u_{2n+1} < u_1$, la suite (u_{2n}) converge vers une limite finie l. De même, $u_{2n+1} > u_{2n} > u_0$ donc la suite (u_{2n+1}) est minorée et converge vers une limite finie l'. En passant à la limite dans la relation $u_{2n+2} = \dfrac{u_n^2 + u_{n+1}^2}{2}$, on trouve la relation $l = \dfrac{l^2 + l'^2}{2}$. De même, en passant à la limite la relation $u_{2n+3} = \dfrac{u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2}{2}$, on aura $l' = \dfrac{l'^2 = l^2}{2}$, donc $l' = l$. Les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ayant la même limite, on peut en déduire que la suite (u_n) converge vers cette même limite. Cette limite ne peut pas être nulle puisque la suite est minorée par $u_0 > 0$, elle est donc nécessairement égale à 1.

(d) On a en effet prouvé que, quelles que soient les valeurs initiales, la suite (u_n) allait converger vers 0, converger vers 1, ou diverger vers $+\infty$, ce qui est exactement ce qui est demandé dans cette question.

10. Il s'agit donc de représenter l'ensemble défini par l'équation $\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = 1$, soit $x^2 + y^2 = 2$. Il s'agit tout simplement d'un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, ou plutôt d'un quart de cercle puisqu'on se contente des valeurs de x et de y positives depuis le début de l'exercice. Ce quart de cercle est représenté en rouge sur la figure en fin d'exercice.

11. On calcule cette fois $u_3(x, y) = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2 + y^2\right)$, donc $u_3(x, y) = 1$ si $(x^2+y^2)^2+4y^2 = 8$, soit $(x^2 + y^2)^2 = 8 - 4y^2$. Cette condition ne peut être vérifiée que si $8 - 4y^2 \geqslant 0$, soit $y \leqslant \sqrt{2}$. On aura alors (tout étant positif) $x^2 + y^2 = \sqrt{8 - 4y^2}$, soit (quand cela a un sens) $x = \sqrt{\sqrt{8 - 4y^2} - y^2}$. On pose donc $h(y) = \sqrt{\sqrt{8 - 4y^2} - y^2}$, la fonction étant définie si $y \leqslant \sqrt{2}$, mais aussi si $\sqrt{8 - 4y^2} \geqslant y^2$, soit $8 - 4y^2 \geqslant y^4$ ou encore $y^4 + 4y^2 - 8 \leqslant 0$. En posant $Y = y^2$, le trinôme $Y^2 + 4Y - 8$ a pour discriminant $\Delta = 16 + 32 = 48 = (4\sqrt{3})^2$, et admet pour racines $Y_1 = \dfrac{-4 - 4\sqrt{3}}{2} < 0$, et $Y_2 = \dfrac{-4 + 4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - 2 > 0$. On en déduit que Y doit être compris entre Y_1 et Y_2 pour que h soit définie, ce qui donne en remontant aux valeurs de y, $\mathcal{D}_h = [0, \sqrt{2\sqrt{3} - 2}]$ (la borne supérieure étant facilement plus petite que $\sqrt{2}$). Elle est dérivable sur cet intervalle sauf en $\sqrt{2\sqrt{3} - 2}$ où sa courbe admettra une tangente verticale, et strictement décroissante sur son domaine de définition (c'est évident même sans expliciter la dérivée, puisque $y \mapsto \sqrt{8 - 4y^2}$ et $y \mapsto -y^2$ sont toutes les deux décroissantes sur ce segment, et qu'on compose par la racine carrée qui est croissante). On peut calculer $h(0) = \sqrt{2\sqrt{2}}$ et $h(\sqrt{2\sqrt{3} - 2}) = 0$. Les plus courageux constateront qu'il y a une tangente horizontale en 0. L'ensemble $\mathcal{C}_3$ est obtenu en prenant la courbe représentative de la fonction h et en la symétrisant par rapport à la droite d'équation $y = x$, puisque h exprime x en fonction de y (autrement dit, $(x, y) \in \mathcal{C}_3$ si $x = h(y)$, ou encore si $y = h^{-1}(x)$, en notant bien sûr h^{-1} la réciproque de la fonction h. L'ensemble $\mathcal{C}_3$ est représenté en bleu sur la figure ci-dessous.

12. Si un point (x, y) appartient à la fois à $\mathcal{C}_2$ et à $\mathcal{C}_3$, la suite $(u_n(x, y))$ aura deux termes consécutifs égaux à 1, elle est donc nécessairement constante égale à 1, ce qui implique que $x = y = 1$. Autrement dit, le point de coordonnées $(1, 1)$ est le seul à appartenir aux deux ensembles. La courbe $\mathcal{C}_3$ est donc en-dessous du quart de cercle $\mathcal{C}_2$ sur l'intervalle $[0, 1]$ (puisqu'elle coupe l'axe des ordonnées en $\sqrt{2\sqrt{3} - 2} < \sqrt{2}$) et au-dessus ensuite. Une allure des deux ensembles :



13. Tout point (x, y) qui se trouve à la fois à l'intérieur (strictement) de $\mathcal{C}_2$ et à l'intérieur de $\mathcal{C}_3$ vérifie $u_2 < 1$ et $u_3 < 1$ (les inégalités auraient du être strictes dans l'énoncé), donc appartient à l'ensemble E_0 puisque la suite va alors converger vers 0. De même, tout point strictement à l'extérieur de $\mathcal{C}_2$ et de $\mathcal{C}_3$ appartiendra nécessairement à E_∞. Ce magnifique problème était un extrait (seulement !) d'un vieux problème de concours PT (Centrale 1989, à l'époque on savait rigoler), où on se proposait ensuite de faire beaucoup mieux, en prouvant que toute demi-droite issue de l'origine dans $(\mathbb{R}^+)^2$ contenait exactement un point (x, y) appartenant à E_1, tous les points de la demi-droite étant situés du côté de ce point contenant l'origine appartenant à E_0 et tous les autres à E_∞. Autrement dit, il existe une courbe traversant le quart de plan depuis l'axe des ordonnées jusqu'à l'axe des abscisses et correspondant à l'ensemble E_1. Les points situés en-dessous de cette courbe sont dans E_0, ceux situés à l'extérieur sont dans E_∞. Cette courbe se situe quelque part entre les courbes $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.