

# Feuille d'exercices n° 9 : Suites numériques

MPSI Lycée Camille Jullian

14 décembre 2022

## Exercice 1 (\*\*\*)

Montrer que l'ensemble  $\left\{ \frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$  est un sous-ensemble dense de  $\mathbb{R}$ .

## Exercice 2 (\*\*)

Démontrer à l'aide des définitions (avec des  $\varepsilon$ ) les limites suivantes :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 2n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} = +\infty$

## Exercice 3 (\* à \*\*)

Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes :

- $u_n = \frac{3^n - 2^n}{4^n}$
- $u_n = (-n+2)e^{-n}$
- $u_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34}$
- $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$
- $u_n = \frac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!}$
- $u_n = e^{-\frac{1}{2n}} + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$
- $u_n = \frac{n + \sin(n)}{n - \cos(n)}$
- $u_n = \operatorname{sh}(2n) - 2 \operatorname{sh}(n)$
- $u_n = \tan\left(\frac{n\sqrt{\ln\left(1 + \frac{\pi^2}{n^2}\right)}}{4}\right)$

## Exercice 4 (\*\*)

Trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  (avec  $a \neq 0$ ) vérifient les drôles de conditions suivantes :

- $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $q$ .
- $a$ ,  $2b$  et  $3c$  sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison  $q$  (la même que ci-dessus, donc).

Déterminer les valeurs possibles de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $q$ .

## Exercice 5 (\*)

Déterminer pour chacune des suites suivantes la valeur de  $u_n$  en fonction de  $n$  :

1.  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - 6$
2.  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
3.  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$
4.  $u_0 = 1, u_1 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$  (méthode alternative à celle que vous avez naturellement utilisée : étudier la suite  $(u_{n+1} - u_n)$ )

5.  $u_0 = 2, u_1 = \frac{10}{3}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, 3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$
6.  $u_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11\dots 11}_n$
7.  $z_0 = 2i$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{3}(2z_n - \bar{z}_n)$  (oui, c'est une suite de nombres complexes)

### Exercice 6 (\*\*)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$ . Déterminer trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n + an^2 + bn + c$  soit une suite géométrique. En déduire la valeur de  $u_n$ .

### Exercice 7 (\*\*)

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à valeurs dans  $[0, 1]$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$ . Montrer que les deux suites convergent vers 1.

### Exercice 8 (\*\*\*)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que, si  $l < 1$ , la suite  $(u_n)$  converge nécessairement vers 0.
2. Que peut-on dire dans le cas où  $l > 1$ ?
3. Montrer par des exemples qu'on ne peut rien conclure sur la limite de  $(u_n)$  quand  $l = 1$ .

### Exercice 9 (\*\*\*)

On s'intéresse à la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ .

1. Que vaut  $u_{n^2+n}$ . Que peut-on en déduire sur la convergence éventuelle de la suite  $(u_n)$ ?
2. Montrer que, pour tout couple d'entiers naturels  $a$  et  $b$ , avec  $b \neq 0$  et  $a \leq b$ , la sous-suite  $u_{n^2b^2+2an}$  converge vers  $\frac{a}{b}$ .
3. Prouver rigoureusement que, pour tout réel  $l \in [0, 1]$ , il existe une sous-suite de  $(u_n)$  convergeant vers  $l$ .

### Exercice 10 (\*\*)

On considère une suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right)$ , où  $a$  est un réel fixé strictement positif.

1. Étudier la nature de la suite  $(u_n)$ .
2. On pose  $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ , déterminer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ , puis  $v_n$  en fonction de  $n$  et de  $v_0$ .
3. En déduire une majoration de l'écart entre  $u_n$  et la limite de la suite en fonction de  $u_0$  et de  $v_0$ . Pour  $a = 2$ , quelle valeur de  $n$  suffit-il de choisir pour que  $u_n$  soit une valeur approchée de la limite à  $10^{-100}$  près (calculatrice autorisée pour l'application numérique!).

### Exercice 11 (\*\*\*)

On pose, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$ ,  $v_n = n!u_n$  et  $w_n = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{\binom{n}{k}}$ .

1. Calculer les valeurs prises par ces trois suites pour  $n = 1$ ,  $n = 2$  et  $n = 3$ .
2. Expliquer pourquoi  $w_n = \sum_{k=0}^n (n-k) \frac{n!}{\binom{n}{k}}$ . En déduire que  $w_n = \frac{nv_n}{2}$ .
3. Montrer en exploitant le résultat de la question précédente que  $u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2n+2}u_n$ .
4. En déduire les valeurs de  $u_5$ ,  $u_6$  et  $u_7$ .
5. On pose enfin  $t_n = \frac{2^n u_n}{n+1}$ . Déterminer une relation entre  $t_{n+1}$  et  $t_n$ .
6. En déduire que  $u_n = \frac{n+1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k+1}$ .

### Exercice 12 (\*\*)

Une suite de Cauchy est une suite réelle  $(u_n)$  vérifiant la propriété suivante :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \geq n_0, |u_p - u_q| < \varepsilon$ .

1. Montrer qu'une suite de Cauchy est nécessairement bornée.
2. Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.
3. Montrer la réciproque : toute suite de Cauchy converge nécessairement.

### Exercice 13 (\*\*\*)

On considère une suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ , avec  $a \in \mathbb{R}_+$ .

1. Montrer que la suite est croissante (pour cette question, on étudiera les variations de la fonction  $f : x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)$  en la dérivant deux fois).
2. Montrer que,  $\forall x \geq 0, \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$ .
3. En déduire que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{na}{n+a} \leq \ln u_n \leq a$ .
4. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
5. Quel résultat obtient-on en prenant  $a = 1$ ?

### Exercice 14 (\*\*)

On considère deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que  $u_0 = v_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + v_n + 1 \\ v_{n+1} &= 2 - 2u_n \end{cases}$

1. Montrer que  $a_n = u_n + v_n$  définit une suite arithmétique.
2. Montrer que  $b_n = 2u_n + v_n$  définit une suite arithmético-géométrique.
3. En déduire les expressions de  $u_n$  et de  $v_n$ .
4. Calculer  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et déterminer la limite de cette suite.

### Exercice 15 (\*)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ , où on a posé  $f(x) = \frac{4x+2}{x+5}$ .

1. Déterminer les réels  $x$  vérifiant  $f(x) = x$ . On note  $a$  le plus petit d'entre eux, et  $b$  le plus grand.
2. Expliquer soigneusement pourquoi la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = \frac{u_n - b}{u_n - a}$  est effectivement bien définie.
3. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.
4. En déduire une expression explicite de  $u_n$ .

### Exercice 16 (\*\*)

Montrer que les deux suites définies par  $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k \times k!}\right)$  et  $v_n = \left(1 + \frac{1}{n \times n!}\right) u_n$  sont adjacentes.

### Exercice 17 (\*)

On considère deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies de la façon suivante :  $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ , et  $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$ .

Montrer que ces deux suites sont adjacentes (les curieux seront contents d'apprendre que leur limite commune vaut  $e$ ). Question subsidiaire (nettement plus difficile) : montrer que la limite commune des ces deux suites est un nombre irrationnel (qu'on ne peut pas écrire sous la forme d'un quotient d'entiers) en faisant un raisonnement par l'absurde.

### Exercice 18 (\*\*)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels vérifiant  $0 < a < b$ . On définit deux suites de la façon suivante :  $u_0 = a$ ,  $v_0 = b$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$  et  $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ .

1. Vérifier que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$  (pour une fois, pas besoin de récurrence).
3. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.
4. En déduire que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite.

### Exercice 19 (\*\*)

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies par  $u_0 = v_0 = 0$  et  $\forall n \geq 0$ ,  $\begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{3 - v_n} \\ v_{n+1} &= \sqrt{3 + u_n} \end{cases}$

1. Montrer que toutes les valeurs de chacune des deux suites appartiennent à l'intervalle  $[0, 3]$ .
2. En supposant que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  soient deux suites convergentes, quelles seraient les valeurs possibles de leurs limites ?
3. On pose  $a_n = u_n - 1$  et  $b_n = v_n - 2$ , montrer que  $|a_{n+1}| \leq |b_n|$  et  $|b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n|$ .
4. On pose enfin  $c_n = \max(|a_n|, |b_n|)$ , montrer que  $c_{n+2} \leq \frac{1}{2}c_n$ . En déduire rigoureusement la convergence de  $(c_n)$ , puis celles de  $(u_n)$  et de  $(v_n)$ .

## Exercice 20 (\*\*\*)

1. Démontrer le théorème de Cesaro : si une suite  $(u_n)$  converge vers une limite finie  $l$ , alors la suite  $(v_n)$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{k=n} u_k$  a la même limite  $l$  (on pourra commencer par traiter le cas particulier où  $l = 0$ , et revenir à la définition de la limite).
2. La réciproque de ce résultat est-elle toujours vraie ?
3. Le théorème de Cesaro fonctionne-t-il encore avec une limite infinie ? La réciproque est-elle vraie dans ce cas ?
4. Si on suppose que  $(u_n)$  est une suite monotone, montrer que la réciproque du théorème de Cesaro devient vraie.
5. Pour une suite  $(u_n)$  convergeant vers  $l$ , on pose désormais  $v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{k=n} k u_k$ . Déterminer la limite de  $(v_n)$  en utilisant une technique proche de celle de la première question.

## Exercice 21 (\*\*)

On considère une suite  $(u_n)$  vérifiant  $0 \leq u_0 \leq u_1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1+u_n}{1+u_{n+1}} u_{n+1}$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie et que  $u_n \geq 0$ .
2. Étudier le signe de  $(u_{n+2} - u_{n+1})(u_{n+2} - u_n)$ .
3. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+1}$ .
4. Préciser la monotonie des sous-suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ . Conclure sur la convergence de la suite  $(u_n)$ .

## Exercice 22 (\*\*\*)

On considère une suite complexe définie par  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$ .

1. Étudier la suite dans le cas particulier où  $z_0 \in \mathbb{R}$ .
2. On suppose désormais que  $z_0$  n'est pas réel et on pose  $z_0 = r e^{i\theta}$ , avec  $\theta \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$ . De même, on notera  $r_n$  et  $\theta_n$  le module et l'argument de  $z_n$ . Exprimer  $r_{n+1}$  et  $\theta_{n+1}$  en fonction de  $r_n$  et  $\theta_n$ .
3. En déduire une expression explicite de  $r_n$  et de  $\theta_n$ .
4. Montrer que la suite  $(z_n)$  converge vers une valeur à préciser.

## Exercice 23 (\*\*\*)

Cet exercice a pour but de démontrer certaines propriétés de la suite de Fibonacci. Rappelons que cette suite  $(F_n)$  est définie de la façon suivante :  $F_0 = 0, F_1 = 1$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . On note dans cet exercice  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  (c'est le fameux nombre d'or), on pourra noter  $\psi = -\frac{1}{\varphi}$  l'opposé de son inverse si on le souhaite.

1. Vérifier que  $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .
2. En remarquant que  $(F_n)$  est une suite d'un type bien connu, déterminer explicitement  $F_n$  en fonction de  $n$  (on ne sera pas surpris d'avoir des coefficients un peu laids, et on se posera par contre des questions philosophiques si  $\varphi$  n'intervient pas dans la formule).
3. On note, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ . Donner la valeur des cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
4. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$  (ne vous étonnez pas s'il n'y a pas de conclusion simple).
5. En utilisant le résultat de la question 2, prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \varphi$ .

6. Déterminer une fonction simple  $f$  telle que  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Étudier la fonction  $f$ , puis tracer dans un même repère une allure de sa courbe représentative et la droite d'équation  $y = x$ . Faire un schéma permettant de comprendre la monotonie et la limite de la suite  $(u_n)$  dans ce même repère.
7. Montrer que,  $\forall n \geq 1$ ,  $|\varphi - u_n| = \frac{1}{\varphi^n F_n}$ .
8. En déduire que  $|\varphi - u_n| \leq \frac{1}{F_n^2}$ .
9. Donner un nombre rationnel approchant  $\varphi$  à  $10^{-4}$  près (on utilisera évidemment la question précédente). Est-ce une approximation par défaut ou par excès ? Donner les valeurs décimales approchées à  $10^{-4}$  près par défaut et par excès de  $\varphi$ .
10. Montrer que, pour tous les entiers pour lesquels ça a un sens,  $F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}$ . En déduire que tous les termes impairs de la suite de Fibonacci sont des nombres entiers pouvant s'écrire comme somme de deux carrés de nombre entiers.
11. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1$ .
12. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$  est une suite géométrique, et déterminer sa valeur.
13. En déduire que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\arctan\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right) - \arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

### Exercice 24 (\*\*\*)

Soit  $(a_n)$  une suite fixée d'entiers naturels. On définit à partir de la suite  $(a_n)$  deux nouvelles suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$  par récurrence :  $p_0 = a_0$ ,  $q_0 = 1$ ,  $p_1 = a_0a_1 + 1$ ,  $q_1 = a_1$ , puis ensuite,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n$  et  $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$ . On posera également  $x_n = \frac{p_n}{q_n}$

1. Uniquement dans cette question, on suppose que la suite  $(a_n)$  est définie par  $a_0 = 1$  et  $\forall n \geq 1$ ,  $a_n = 2$ . Calculer alors les valeurs de  $p_n$  et  $q_n$  pour tous les entiers  $n \leq 4$ , ainsi que les valeurs de  $x_n$  pour ces mêmes entiers.
2. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $q_n \geq n$ .
3. Calculer  $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n$  et  $p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n$ .
4. Calculer  $x_{n+1} - x_n$ , puis  $x_{n+2} - x_n$  en fonction des valeurs prises par les suites  $(a_n)$  et  $(q_n)$ .
5. Montrer que les suites  $(x_{2n})$  et  $(x_{2n+1})$  sont adjacentes. Que peut-on en déduire sur la suite  $(x_n)$  ? On notera désormais  $\alpha$  la limite de la suite  $(x_n)$ .
6. Vérifier que  $x_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}$  et  $x_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$ .
7. Montrer plus généralement que  $x_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$ .
8. En comparant  $x_0$ ,  $x_1$  et  $\alpha$ , montrer que  $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ .
9. On note désormais  $\alpha_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+3} + \dots}}}$  (la suite de fractions étant **infinie**, il s'agit techniquement de la limite de la suite  $(x_n)$  correspondant à la suite  $(a_{n+k})_{k \in \mathbb{N}}$ ). En particulier,  $\alpha_0 = \alpha$ .
  - (a) Déterminer une relation entre  $\alpha_n$ ,  $\alpha_{n+1}$  et  $a_n$ .
  - (b) Décrire un algorithme permettant de calculer les termes de la suite  $(a_n)$  à partir de la valeur de  $\alpha$ .
  - (c) Lorsque  $\alpha = \sqrt{2}$ , calculer  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , et les valeurs correspondantes de  $\alpha_n$ .
  - (d) Que vaudra plus généralement  $a_n$  (toujours pour  $\alpha = \sqrt{2}$ ) ?
  - (e) Déterminer de même une écriture de  $\sqrt{3}$  sous forme de « fraction infinie » (on parle de développement en fraction continue).

## Problème 1 : autour de la méthode de Newton (\*\*)

La méthode de Newton sert à déterminer des valeurs approchées de solutions d'équations de la forme  $f(x) = 0$ , où  $f$  est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle  $I$  (et ayant des signes opposés aux extrémités de  $I$ , pour assurer que l'équation admet bien une solution sur  $I$ ). Pour cela, on construit une suite  $(x_n)$  de la façon suivante :  $x_0 \in I$ , et pour tout entier naturel  $n$ , le réel  $x_{n+1}$  est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses ( $O_x$ ) et de la tangente en  $x_n$  à la courbe de la fonction  $f$ .

1. Faire un dessin illustrant la construction des premiers termes de la suite  $(x_n)$  (on prendra une allure de type parabolique pour la courbe de  $f$ ).
2. Montrer que  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .
3. Pour la suite de l'exercice, on pose  $f(x) = x^2 - a$ , où  $a > 1$ ;  $I = ]0, +\infty[$  et  $x_0 = a$ .
  - (a) Vérifier que, dans ce cas,  $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$ .
  - (b) Étudier la fonction  $g : x \mapsto \frac{x^2 + a}{2x}$  et la fonction  $h : x \mapsto g(x) - x$  sur l'intervalle  $I$ .
  - (c) En déduire que la suite  $(x_n)$  est décroissante et minorée, puis qu'elle converge vers  $\sqrt{a}$ .
4. On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}$ .
  - (a) Montrer que  $v_{n+1} = v_n^2$ .
  - (b) En déduire que  $|x_n - \sqrt{a}| \leq 2x_0(v_0)^{2^n}$ .
5. On suppose désormais  $a = 2$ .
  - (a) Calculer les quatre premiers termes de la suite  $(x_n)$ .
  - (b) Montrer que  $|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{4}{3^{(2^n)}}$ .
  - (c) À partir de quelle valeur de  $n$  est-on sûr que  $x_n$  est une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  à  $10^{-6}$  près?

## Problème 2 : autour de la série harmonique (\*\*\*)

La série harmonique (nous verrons en fin d'année ce que désigne exactement le terme de **série**, aucune connaissance à ce sujet n'est évidemment nécessaire pour résoudre cet exercice) est la suite  $(H_n)$  dont le

terme général est défini par  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  (pour  $n \geq 1$ ).

1. Divergence de la suite  $(H_n)$ .
  - (a) Déterminer la monotonie de la suite  $(H_n)$ .
  - (b) Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ .
  - (c) Conclure quant à la nature de la suite  $(H_n)$ .
2. On pose pour cette question  $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$  et  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ .
  - (a) Calculer les trois premiers termes de chaque suite.
  - (b) Prouver que les deux suites sont adjacentes, et en déduire la convergence de  $(v_n)$ .
3. Équivalent du terme général  $H_n$  de la série harmonique.
  - (a) Montrer que,  $\forall k \geq 1$ , l'encadrement  $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$  est valable (on pourra ici s'intéresser à des histoires d'intégrales, ou plus simplement étudier le signe de fonctions bien choisies).
  - (b) En déduire que  $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$ , puis montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ .

- (c) En posant  $a_n = H_n - \ln(n)$  et  $b_n = H_n - \ln(n+1)$ , montrer que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes, et en déduire que  $(H_n - \ln(n))$  admet une limite finie (connue par les mathématiciens sous le nom de constante d'Euler, et habituellement notée  $\gamma$ ).
- (d) Montrer rigoureusement que la suite  $(v_n)$  introduite à la question 2 a pour limite  $\ln(2)$  (on pourra commencer par écrire que  $v_n = H_{2n} - H_n$ ).

### Problème 3 (\*\*\*)

On s'intéresse dans ce problème à l'ensemble  $\mathcal{S}$  constitué de toutes les suites  $(u_n)$  vérifiant la relation de récurrence  $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_n^2 + u_{n+1}^2)$ , avec  $u_0 \geq 0$  et  $u_1 \geq 0$ . Si  $(x, y)$  est un couple de réels positifs, on notera  $(u_n(x, y))$  la suite appartenant à  $\mathcal{S}$  et vérifiant  $u_0(x, y) = x$  et  $u_1(x, y) = y$ . Pour tout réel  $\lambda$ , on notera  $E_\lambda = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid (u_n(x, y)) \text{ converge vers } \lambda\}$ . On notera également  $E_\infty = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid (u_n(x, y)) \text{ diverge vers } +\infty\}$ .

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite  $(u_n(1, 0))$ .
2. (a) Déterminer toutes les suites constantes appartenant à  $\mathcal{S}$ .  
(b) Montrer que, si une suite dans  $\mathcal{S}$  a deux termes consécutifs égaux à 1, alors elle est constante.  
(c) Que peut-on dire d'une suite de  $\mathcal{S}$  ayant un terme nul autre que les deux premiers?
3. On suppose qu'une suite de  $\mathcal{S}$  admet une limite finie  $l$ . En passant à la limite dans la relation de récurrence, déterminer les valeurs possibles de  $l$ .
4. Soient  $a$  et  $b$  deux réels quelconques.  
(a) Montrer que, si  $0 \leq a \leq b \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ , alors  $b \geq 1$  ou  $a = b = 0$ .  
(b) Montrer que, si  $\frac{a^2 + b^2}{2} \leq a \leq b$ , alors  $b \leq 1$ .
5. Comparer le signe de  $u_{n+3} - u_{n+2}$  et celui de  $u_{n+2} - u_n$  pour une suite appartenant à  $\mathcal{S}$ .
6. On suppose dans cette question que la suite  $(u_n)$  (appartenant à  $\mathcal{S}$ ) vérifie la condition suivante : pour un certain entier  $n$ , on a  $u_n \leq u_{n+2}$  et  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ .  
(a) Montrer que  $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq u_{n+3}$ .  
(b) Montrer que  $(u_n)$  est croissante à partir du rang  $n+1$ , puis strictement croissante ou constante à partir de ce rang.  
(c) Montrer que  $u_{n+2} \geq 1$ .  
(d) En déduire que la suite diverge vers  $+\infty$  (ou est constante).
7. On suppose cette fois que  $u_{n+2} \leq u_n$  et  $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ . Montrer en procédant comme dans la question précédente que la suite  $(u_n)$  converge vers 0 (si elle n'est pas constante).
8. Quelles sont les limites des suites  $(u_n(\sqrt{2}, 0))$  et  $(u_n(2, 0))$ ?
9. On suppose qu'une suite  $(u_n)$  appartenant à  $\mathcal{S}$  n'a pas pour limite 0, ni  $+\infty$ , et qu'elle n'est pas constante.  
(a) Montrer que  $u_1 \neq u_0$ .  
(b) Montrer que  $u_{n+2}$  est toujours strictement compris entre  $u_n$  et  $u_{n+1}$ .  
(c) On suppose  $u_0 < u_1$ , montrer que la sous-suite  $(u_{2n})$  est strictement croissante et la sous-suite  $(u_{2n+1})$  strictement décroissante. Prouver ensuite que  $(u_n)$  converge vers 1.  
(d) On obtient la même conclusion si  $u_0 > u_1$ . Déduire des questions précédentes que tout couple de réels positifs  $(x, y)$  appartient à l'un des trois ensembles  $E_0$ ,  $E_1$  et  $E_\infty$ .
10. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble  $\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid u_2(x, y) = 1\}$ .
11. Déterminer une fonction  $h$  telle que  $u_3(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = h(y)$ . Étudier la fonction  $h$  et représenter graphiquement l'ensemble  $\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid u_3(x, y) = 1\}$ .
12. Étudier la position relative des ensembles  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ .
13. On admet les résultats suivants concernant les suites de  $\mathcal{S}$  :
  - $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  si et seulement s'il existe un entier  $n$  pour lequel  $u_n \geq 1$  et  $u_{n+1} \geq 1$ .
  - $(u_n)$  converge vers 0 si et seulement s'il existe un entier  $n$  tel que  $u_n \leq 1$  et  $u_{n+1} \leq 1$ .
 Déterminer deux sous-ensembles de  $(\mathbb{R}^+)^2$  les plus grands possibles inclus respectivement dans  $E_0$  et dans  $E_\infty$ .