

# Feuille d'exercices n° 25 : séries, familles sommables

MPSI Lycée Camille Jullian

1er juin 2023

## Exercice 1 (\* à \*\*\*)

Étudier la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes :

$$\begin{array}{lll} \bullet \sum \frac{n-1}{3^n} & \bullet \sum \frac{n(n-1)x^n}{n!} & \bullet \sum \frac{2n^2}{n^3-1} \\ \bullet \sum \frac{1}{2^{2n+1}} & \bullet \sum \frac{4(-1)^n}{n!} & \bullet \sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ \bullet \sum \frac{3+n2^n}{4^{n+2}} & \bullet \sum \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) & \bullet \sum \frac{1}{4n^2-1} \\ \bullet \sum \frac{\text{ch}(n)}{3^n} & \bullet \sum \frac{5}{(2n+1)(2n+3)} & \bullet \sum \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \\ \bullet \sum e^{-nx} & \bullet \sum \ln \left( \cos \left( \frac{a}{2^n} \right) \right) & \bullet \sum \binom{n}{p} x^n \end{array}$$

Pour la dernière série,  $p$  est un entier fixé et  $x$  un réel appartenant à  $] -1, 1[$ .

## Exercice 2 (\*\*)

Soit  $u_n$  une suite définie par  $u_0 > 0$  et  $\forall n \geq 1, u_{n+1} = e^{-u_n} u_n$ .

1. Montrer que la suite  $u_n$  est convergente et préciser sa limite.
2. En posant  $v_n = \ln u_n$ , calculer la somme partielle de la série de terme général  $u_n$  en fonction de  $v_0$  et de  $v_{n+1}$ .
3. En déduire la nature de  $\sum u_n$ .

## Exercice 3 (\*)

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, déterminer un équivalent simple du reste d'indice  $n$  de la série de terme général  $\frac{1}{n^2}$ . Si on est courageux, on généralisera pour la série de terme général  $\frac{1}{n^k}$ .

## Exercice 4 (\*\*\*)

On considère une suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in [0; 1]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n^2$  et sa somme éventuelle.
3. Prouver que la série de terme général  $\ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$  est divergente.
4. En déduire la nature de la série  $\sum u_n$ .

### Exercice 5 (\* à \*\*)

Étudier la nature de chacune des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme :

$$\begin{array}{lll}
 \bullet \sum \frac{1}{n^2 - n} & \bullet \sum \frac{1}{e^n + e^{-n}} & \bullet \sum \frac{1}{n^3 + 2^n} \\
 \bullet \sum \ln \frac{n^2 + n^4}{2n^4} & \bullet \sum \sqrt{\frac{n+2}{n^3 - 5n + 1}} & \bullet \sum \frac{\ln n}{3^n} \\
 \bullet \sum \frac{\ln(1+n)}{\ln(1+3n)} & \bullet \sum \frac{n^2}{n!} & \bullet \sum \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \\
 \bullet \sum \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} & \bullet \sum \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+2)!} & \bullet \sum \arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right) \\
 \bullet \sum \ln \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2n} & \bullet \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} & \bullet \sum \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}
 \end{array}$$

Les dernières séries de l'exercice sont connues sous le nom de séries de Bertrand.

### Exercice 6 (\*\*)

En admettant que  $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$  et que  $\zeta(4) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ , calculer les valeurs des sommes suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 \bullet \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} & \bullet \sum_{(k,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{k^2 n^2} & \bullet \sum_{1 \leq k < n} \frac{1}{k^2 n^2} \\
 \bullet \sum_{k|n} \frac{1}{k^2 n^2} & \bullet \sum_{(k,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{(-1)^{kn}}{k^2 n^2} & \bullet \sum_{k \wedge n = 1} \frac{1}{k^2 n^2}
 \end{array}$$

### Exercice 7 (\*\*)

1. Montrer qu'il n'existe aucun entier naturel  $n$  tel que  $\sin^2(n) \leq \frac{1}{2}$ ,  $\sin^2(n+1) \leq \frac{1}{2}$  et  $\sin^2(n+2) \leq \frac{1}{2}$ .
2. En déduire la nature de la série  $\sum \frac{\sin^2(n)}{n}$ .

### Exercice 8 (\*\*)

1. Prouver la convergence de la série de terme général  $\arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$ .
2. Comparer ce terme général avec  $\arctan(n+1) - \arctan(n)$ .
3. En déduire la valeur de la somme de la série étudiée.

### Exercice 9 (\*\*)

1. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la série de terme général  $a\sqrt{n-1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n+1}$  soit convergente. Indice : un peu de révision de développements limités ne peut pas vous faire de mal.
2. Même question pour la série de terme général  $\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \left(an + b + \frac{c}{n}\right)$  (et même indice!).
3. Vous êtes tellement bien partis que vous allez maintenant déterminer la nature de la série de terme général  $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$  en fonction du réel  $a$ .

### Exercice 10 (\*\*\*)

Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs telle que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  pour un certain réel  $\alpha > 1$ .

1. Montrer que, si  $\beta < \alpha$ , la suite  $(n^\beta u_n)$  est décroissante à partir d'un certain rang.
2. En déduire que la série  $\sum u_n$  converge (c'est la règle de Raabe-Duhamel-Darboux).
3. Étudier la nature de la série  $\sum \binom{2n}{n} \frac{1}{n \times 2^{2n}}$ .

### Exercice 11 (\*\*\*)

Déterminer pour chacune des familles suivantes si elle est sommable ou non :

1.  $\left(\frac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n,p \geq 2}$
2.  $\left(\frac{1}{n^2 - p^2}\right)_{n,p \geq 1, n \neq p}$
3.  $\left(\frac{1}{r^2}\right)_{r > 1, r \in \mathbb{Q}}$
4.  $\left(\frac{z^{pq}}{p!q!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ , selon la valeur de  $z \in \mathbb{C}$

### Exercice 12 (\*)

Déterminer les sommes des familles suivantes (en précisant éventuellement les conditions à imposer sur les variables  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$  pour assurer la sommabilité) :

$$\bullet \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{z^p}{q!} \quad \bullet \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{z^p z'^q}{p!q!} \quad \bullet \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{q^p z^p}{p!q!} \quad \bullet \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \binom{p+q}{p} z^{p+q}$$

### Exercice 13 (\*\*)

Calculer les sommes suivantes (la dernière valeur est à donner en fonction de  $\zeta(3)$ ) :

$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} \quad 2. \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \quad 3. \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad 4. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

### Problème 1 (\*\*\*)

On note dans cet exercice  $E$  l'ensemble de toutes les suites  $(p_n)$  croissantes (mais pas forcément strictement) d'entiers naturels telles que  $p_0 \geq 2$ . Pour une suite  $(p_n)$  appartenant à  $E$ , on s'intéresse à la série  $(S_n)$  de terme général  $\frac{1}{p_0 \dots p_n}$ . Autrement dit,  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\prod_{i=0}^k p_i}$ .

1. Commençons par étudier quelques cas particuliers :
  - (a) Dans le cas où la suite  $(p_n)$  est constante égale à 2, reconnaître la série  $(S_n)$ , et en déduire sa convergence, ainsi que la valeur de sa somme.
  - (b) Généraliser au cas d'une suite  $(p_n)$  constante égale à  $p$ , pour un certain entier naturel  $p \geq 2$ .
  - (c) Supposons désormais que  $p_n = n + 2$ , reconnaître à nouveau la série  $(S_n)$ , et prouver sa convergence vers une somme à déterminer. Vérifier que cette somme appartient à l'intervalle  $]0, 1]$ .
  - (d) En supposant désormais que  $p_n = 2n + 2$ , prouver que le terme général de la série  $(S_n)$  est égal à  $\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$ , en déduire la convergence et la somme de la série  $(S_n)$ . Vérifier à nouveau que la somme appartient à  $]0, 1]$ .
2. Dans le cas général, prouver que la série  $(S_n)$  est toujours convergente, et que sa somme appartient à  $]0, 1]$ . On notera désormais  $S(p)$  la somme de la série associée à la suite  $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

3. Montrer que l'application  $S : E \rightarrow ]0, 1]$  est une application injective (on pourra commencer par constater que, si  $p_0 > q_0$ , alors  $S(p) < S(q)$ ).
4. Soit  $x$  un réel appartenant à l'intervalle  $]0, 1]$ . On construit à partir de  $x$  la suite  $(y_n)$  de la façon suivante :  $y_0 = x$  et  $\forall n \geq 1, y_{n+1} = p_n y_n - 1$ , où  $p_n = \text{Ent} \left( 1 + \frac{1}{y_n} \right)$ .
  - (a) Déterminer les premiers termes des suites  $(y_n)$  et  $(p_n)$  lorsque  $x = \frac{3}{7}$  (calculez jusqu'à ce qu'il se produise quelque chose de remarquable, ce qui devrait arriver vite). Calculer  $S(p)$  pour la suite  $(p_n)$  ainsi obtenue.
  - (b) Dans le cas général, montrer que  $(y_n)$  est une suite décroissante d'éléments de  $]0, 1]$ .
  - (c) En déduire que  $(p_n)$  vérifie toujours les hypothèses posées en début d'exercice.
  - (d) Exprimer  $x$  en fonction de  $p_0, p_1, \dots, p_n$  et  $y_n$ , et en déduire la valeur de  $S(p)$  lorsque  $p = (p_n)$ . Conclure que  $S$  est une application bijective de  $E$  dans  $]0, 1]$ .

## Problème 2 (\*\*\*)

Le but de ce problème est d'améliorer le résultat du cours sur la série harmonique  $(H_n)$  qui, rappelons-le, est définie par  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . On sait déjà que  $H_n \sim \ln(n)$  (ce résultat est supposé déjà connu et donc utilisable si besoin dans ce problème), et on va désormais étudier la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = H_n - \ln(n)$ .

1. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
2. En déduire la convergence de  $(u_n)$  vers une limite qu'on notera désormais  $\gamma$  (on pourra reprendre le schéma de la démonstration du cours concernant l'équivalent de la série harmonique pour minorer  $u_n$ ). Montrer que  $\gamma \in [0, 1]$ .
3. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$ . Pour tout entier  $k \neq 0$ , on pose
 
$$I_k = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left( t - k - \frac{1}{2} \right)^2 f''(t) dt.$$
  - (a) Montrer que  $I_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t) dt$ .
  - (b) En déduire que  $\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} I_k$ .
  - (c) On suppose désormais qu'on a posé  $f(x) = \frac{1}{x}$ , montrer que  $0 \leq I_k \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3} dt$  pour tout  $k \geq 1$ .
  - (d) En déduire que la série  $\sum I_k$  converge, puis montrer que  $\sum_{k=n}^{+\infty} I_k = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .
  - (e) En déduire enfin que  $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .
4. (a) Soit  $\alpha > 1$ , montrer que, si  $k \geq 2$ , alors  $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt$ .
  - (b) En déduire que  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ .
5. Montrer que, si la série  $\sum a_n$  converge, que  $a_n > 0$  et  $a_n \sim b_n$ , alors la série  $\sum b_n$  converge (ça c'est du cours) et surtout les restes sont équivalents :  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$ .
6. On pose désormais  $x_n = u_n - \frac{1}{2n}$ .
  - (a) Montrer que  $\gamma - x_n = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2 \ln \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \right)$ .
  - (b) En déduire que  $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .