Feuille d'exercices n° 21 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

3 mai 2023

Exercice 1 (**)

L'univers ressemble à ceci : $\Omega = \{(1,1,1,1),(1,1,1,2),\dots,(6,6,6,6)\}$ (toutes les 4-listes d'éléments de $\{1,2,3,4,5,6\}$). On a $|\Omega| = 6^4 = 1296$.

1. Il y a six cas favorables, soit une probabilité de $\dfrac{6}{6^4} = \dfrac{1}{216} \simeq 0.0046$.
2. Il faut bien entendu faire attention qu fait qu'il ne s'agit pas du complémentaire de la question précédente. Pour avoir quatre chiffres différents, il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ cas favorables, soit une probabilité de $\dfrac{360}{1296} = \dfrac{5}{18} \simeq 0.28$.
3. Le plus simple est de faire la liste des combinaisons possibles : $(1,2,3,4),(2,3,4,5),(3,4,5,6),(4,3,2,1),(5,4,3,2),(6,5,4,3)$, ce qui laisse la même probabilité qu'à la première question.

Exercice 2 (*)

Une représentation sous forme d'arbre ou, pour faire plus savant, la formule des probabilités composées, permet d'obtenir rapidement les valeurs souhaitées. La probabilité que le premier joueur gagne vaut $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Pour le deuxième, il faut que le joueur 1 tire une boule noire, puis que lui-même tire une boule blanche sur les cinq boules restant dans l'urne, soit une probabilité de $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$. De même, le troisième joueur gagne avec probabilité $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{5}$, le quatrième avec une probabilité $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{15}$. Enfin, le dernier joueur gagne avec une probabilité $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{15}$. Notons que la somme de ces cinq probabilités vaut $\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{15} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{5+4+3+2+1}{15} = 1$, ce qui est tout à fait normal puisqu'il y a quatre boules noires dans l'urne, ce qui implique qu'avec des tirages sans remise, l'un des cinq joueurs va nécessairement tirer une boule blanche.

Exercice 3 (**)

Commençons par constater qu'il y a $10^6 = 1\ 000\ 000$ numéros de téléphones au total.

1. Les numéros commençant par 01 sont au nombre de 10^4, ce qui laisse une probabilité de $\dfrac{10^4}{10^6} = \dfrac{1}{100}$.
2. On a cette fois-ci $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ numéros possibles, soit une probabilité de $\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{10^6} = \dfrac{189}{1\ 250}$.
3. Il ne faut pas oublier de tenir compte de la position des deux 5 : il y a $10^4 \times \dbinom{6}{2}$ numéros possibles, soit une probabilité de $\dfrac{10^4 \times 15}{10^6} = \dfrac{3}{20}$.

4. Ca c'est facile : 5^6 numéros, et une probabilité de $\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$.
5. Il suffit de choisir les six chiffres apparaissant dans le numéro pour connaitre le numéro (puisque l'ordre sera alors imposé), ce qui donne $\binom{10}{6} = 210$ numéros possibles, et une probabilité de $\frac{210}{10^6} = \frac{21}{100\ 000}$.

Exercice 4 (*)

Commençons par constater qu'il y a 28 dominos au total : sept doubles, et $\binom{7}{2} = 21$ dominos « non doubles » avec deux numéros compris entre 0 et 6. Un tirage simultané de deux dominos donne donc $\binom{28}{2} = \frac{28 \times 27}{2} = 14 \times 27 = 378$ tirages différents possibles. Il existe plein de façons de compter le nombre de tirages donnant deux dominos qu'on peut placer côte à côté, mais celle-ci est élégante : on choisit une valeur entre 0 et 6 qui doit être commune aux deux dominos (sept possibilités), puis on choisit les deux dominos en question de $\binom{7}{2} = 21$ façons possibles, soit $7 \times 21 = 147$ possibilités, et donc une probabilité égale à $\frac{147}{378} = \frac{49}{126} = \frac{7}{18}$.

Exercice 5 (**)

1. On obtiendra nécessairement soit le n-ème Pile avant le n-ème Face, soit le contraire, et il est certain qu'on finira par obtenir un n-ème Pile ou un n-ème Face (ce sera même le cas après au maximum $2n - 1$ tirages). Les deux possibilités étant symétriques et la pièce équilibrée, elles ont pour probabilité $\frac{1}{2}$ chacune.
2. On peut séparer l'évènement correspondant en deux cas : soit un obtient le n-ème Pile avant le n-ème Face (probabilité $\frac{1}{2}$ d'après la question précédente), soit on l'obtient après le n-ème Face mais avant le $n + 1$-ème, donc entre ces deux Faces. Cette dernière possibilité implique qu'on ait obtenu le n-ème Pile au lancer numéro $2n$, avec exactement n Faces obtenus lors des $2n - 1$ premiers lancers, puis qu'on ait obtenu Face au lancer numéro $2n + 1$. Autrement dit, on a eu n Faces et $n - 1$ Piles (dans un ordre aléatoire) puis exactement PF. La probabilité de cette série est de $\binom{2n-1}{n} \times \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{1}{4} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!2^{2n+1}}$.

Exercice 6 (*)

1. On calcule aisément $\mathbb{P}(A > B) = \frac{2}{3}$ (le dé A soit simplement tomber sur une de ses quatre faces 5), $\mathbb{P}(B > C) = \frac{2}{3}$ (cette fois, C doit tomber sur une face 3), $\mathbb{P}(C > D) = \frac{2}{3}$ (soit le dé C tombe sur 42, soit il tombe sur 3 et le dé D tombe sur 2), et $\mathbb{P}(D > A) = \frac{2}{3}$ (soit D tombe sur 6, soit il tombe sur 2 et A sur 1). Chaque dé est donc « plus fort » que le suivant, et ce cycliquement, ce qui est assez paradoxal. Cela signifia mathématiquement qu'on ne peut pas mettre une relation d'ordre sur les dés en imposant quelque chose du genre « X est plus grand que Y si $\mathbb{P}(X > Y) > \frac{1}{2}$ ».
2. Il vaut bien évidemment mieux jouer en deuxième, puisqu'on pourra toujours choisir un dé « plus fort » que celui choisi par le premier jouer (on aura même exactement $\frac{2}{3}$ de chances de gagner).

Exercice 7 (***)

Il y ici deux univers raisonnables pour les résultats. On peut ne pas tenir compte de l'ordre et prendre pour Ω l'ensemble des sous-ensembles à 5 éléments de l'ensemble des 25 boules de l'urne, soit $|\Omega| = \dbinom{25}{5}$, mais également choisir de travailler avec des arrangements, auquel cas $|\Omega| = 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21$. Nous choisissons ici le premier univers, constitué de combinaisons.

1. Il y a $\binom{15}{5}$ tirages favorables, soit une probabilité de $\dfrac{\binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} \simeq 0.057$.
2. On a introduit un ordre, il faut changer d'univers ou plus simplement calculer la proba boule par boule (autrement dit à l'aide de la formule des probabilités composées), elle vaut $\dfrac{15}{25} \times \dfrac{10}{24} \times \dfrac{9}{23} \times \dfrac{14}{22} \times \dfrac{13}{21} = \dfrac{39}{1012} \simeq 0.039$.
3. On peut revenir à notre premier univers, les tirages favorables sont ceux constituées de cinq boules vertes et ceux constitués de quatre boules vertes et d'une boule blanche (union disjointe), donc la proba vaut $\dfrac{\binom{15}{4} \times \binom{10}{1} + \binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} \simeq 0.313$ (on a séparé l'événement en deux cas disjoints).
4. De la même façon que précédemment, la proba vaut $\dfrac{\binom{15}{3} \times \binom{10}{2}}{\binom{25}{5}} \simeq 0.385$. Dans les deux dernières questions, si on a décidé de travailler avec des arrangements, on fera bien attention au fait que l'ordre des tirages n'est pas imposé dans l'énoncé (contrairement à la deuxième question), ce qui laisse plus de cas favorables.

Dans le cas des tirages avec remise, on est de toute façon obligés de travailler avec des listes, donc $|\Omega| = 25^5$.

1. Il y a 15^5 tirages favorables, donc une probabilité de $\dfrac{15^5}{25^5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^5 \simeq 0.078$.
2. Il y a $15 \times 10 \times 10 \times 15 \times 15$ tirages favorables, soit une probabilité de $\dfrac{15^3 \times 10^2}{25^5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \simeq 0.035$.
3. Soit on obtient cinq vertes (15^5 cas), soit quatre vertes et une blanche, ce qui correspond à $15^4 \times 10 \times 5$ cas (il ne faut pas oublier de multiplier par 5 pour tenir compte du choix de la position de la boule blanche), donc une probabilité de $\dfrac{15^5 + 15^4 \times 10 \times 5}{25^5} \simeq 0.337$.
4. Là encore, la seule difficulté est de ne pas oublier le choix de la position des deux blanches, la probabilité vaut $\dfrac{\binom{5}{2} \times 15^3 \times 10^2}{25^5} \simeq 0.346$.

Exercice 8 (***)

1. Soit A gagne au premier lancer (une chance sur deux), soit il gagne à son deuxième lancer, ce qui implique que lui-même et B aient perdu au premier lancer, c'est-à-dire que les trois premiers lancers soient FPP, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{8}$; soit il gagne à son troisième lancer, probabilité $\dfrac{1}{32}$ (même raisonnement qu'avant), soit au total une proba de $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32} = \dfrac{21}{32} \simeq 0.656$ (les trois cas étant bien sûr incompatibles).

2. Par un raisonnement très similaire à la première question, la probabilité de victoire du joueur B vaut $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{10}} \simeq 0.333$ (les tirages faisant gagner le joueur B sont FF, $FPFF$, $FPFPFF$, $FPFPFPFF$ et $FPFPFPFPFF$).
3. Il reste une proba de $\frac{1}{2^{10}} \simeq 0.000098$ que personne n'ait gagné après dix lancers (5 chacun), le seul cas favorable étant $FPFPFPFPFP$.
4. C'est un calcul de probabilité conditionnelle : la probabilité que A gagne vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512} = \frac{341}{512}$, la probabilité que quelqu'un ait gagné est le complémentaire de la probabilité calculée à la question précédente, elle vaut $1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1\ 023}{1\ 024}$. La probabilité conditionnelle cherchée est donc de $\frac{341}{512} \times \frac{1\ 024}{1\ 023} = \frac{2}{3}$. Je vous laisse voir pourquoi ce résultat est intuitivement normal.

Exercice 9 (***)

1. Puisque tout est distinguable, il y a 4 possibilités de rangement pour chaque boule, soit $4^5 = 1\ 024$ rangements possibles au total. Autrement dit, $|\Omega| = 1\ 024$.
2. Il y a quatre rangements pour lesquels toutes les boules sont dans la même boite (un pour chaque boite), soit une probabilité de $\frac{4}{1\ 024} = \frac{1}{256} \simeq 0.004$.
3. Commençons par choisir les deux boites non vides, ce qui laisse $\binom{4}{2} = 6$ possibilités. Une fois ce choix effectué, il y a 2^5 façons de caser les cinq boules dans nos deux boites, mais il faut en enlever deux si on veut que nos deux boites ne soient pas vides (les deux pour lesquelles une des deux boites recueille toutes les boules). Cela fait donc finalement $6 \times (2^5 - 2)$ cas favorables, soit une probabilité de $\frac{6 \times 30}{1\ 024} = \frac{45}{256} \simeq 0.178$.
4. On peut répartir les cinq boules comme suit si on veut exactement une boite vide : $3-1-1-0$ ou $2-2-1-0$. Dans le premier cas, il faut choisir la boite contenant trois boules (4 choix), les trois boules en question ($\binom{5}{3} = 10$ choix), la boite contenant la quatrième boule (3 choix) et la boite contenant la dernière boule (2 choix ; si on veut on peut remplacer ces derniers choix par le choix des deux boites non vides puis de la boule allant dans la première boite non vide, ce qui revient au même). Il y a donc $4 \times 10 \times 3 \times 2 = 240$ répartitions $3-1-1-0$. Pour les $2-2-1-0$, il y a 4 choix pour la boite contenant une seule boule, 5 choix pour la boule allant dans cette boite, 3 choix pour la boite vide, et enfin $\binom{4}{2} = 6$ choix pour les deux boules allant dans la première des deux boites restantes, soit $4 \times 5 \times 3 \times 6 = 360$ possibilités. Finalement la probabilité d'avoir exactement une boite vide est de $\frac{360}{1\ 024} = \frac{45}{128} \simeq 0.352$.
5. On a calculé successivement les probabilités d'avoir trois, deux et une boite vide. Comme on ne peut pas avoir quatre boites vides, la probabilité de ne pas avoir de boite vide est complémentaire de la somme des précédentes, elle vaut $\frac{1\ 024 - 4 - 180 - 600}{1\ 024} = \frac{240}{1\ 024} = \frac{15}{64} \simeq 0.234$.
6. Notons A_1 « La première boite est vide » et ainsi de suite jusqu'à A_4. Le nombre de cas favorables à A_1 est $3^5 = 243$ (il faut caser les cinq boules dans trois boites), donc $P(A_1) = \frac{243}{1\ 024}$. De même pour A_2, A_3 et A_4. Par un raisonnement similaire, le nombre de cas favorables à $A_1 \cap A_2$ est $2^5 = 32$, donc $P(A_1 \cap A_2) = \frac{32}{1\ 024}$, et de même pour les autres intersection de

deux évènements. Enfin, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{1\ 024}$, et de même pour les autres intersections de trois évènements. Enfin, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ est impossible. On peut appliquer la formule de Poincaré : $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{4 \times 243 - 6 \times 32 + 4 \times 1 - 0}{1\ 024} = \frac{784}{1\ 024} = \frac{49}{64}$. La probabilité cherchée est le complémentaire de celle que nous venons de calculer, on retrouve $\frac{15}{64}$ comme à la question précédente.

Exercice 10 (***)

1. Pour cette question, seul le premier tour nous intéresse. Celui-ci est constituée de 32 matchs faisant s'affronter deux joueurs. Peu importe dans quel ordre ces deux joueurs ont été tirés. Il y a $\binom{64}{2}$ possibilités pour le tirage du premier match, $\binom{62}{2}$ pour le deuxième etc, jusqu'à $\binom{2}{2}$ pour le dernier match. Comme on se fiche de l'ordre des matchs, on peut diviser par 32! (le nombre d'ordres possibles) pour obtenir un total de possibilités de $\frac{64 \times 63}{2} \times \frac{62 \times 61}{2} \times \dots \times \frac{2 \times 1}{2} \times \frac{1}{32!} = \frac{64!}{2^{32} \times 32!}$ tirages possibles.
Si on ne veut pas que deux têtes de séries se rencontrent, il y 56 choix possibles pour l'adversaire de la première tête de série (8 joueurs sur 64 sont têtes de série, donc 56 ne le sont pas), 55 pour l'adversaire de la deuxième tête de série, etc jusqu'à 49 pour l'adversaire de la huitième tête de série. Il reste ensuite à répartir les 48 concurrents restants en 24 paires, ce qui se fait de $\frac{48!}{2^{24} \times 24!}$ façons (cf le calcul ci-dessus). La probabilité qu'il n'y ait pas de matchs opposant deux têtes de séries vaut donc $\frac{56!}{48!}\frac{48!}{2^{24} \times 24!} \times \frac{2^{32} \times 32!}{64!} = \frac{2^8 \times 25 \times 26 \times \dots \times 32}{57 \times 58 \times \dots \times 64} \simeq 0.608$.
La probabilité cherchée est le complémentaire de celle-ci, elle vaut environ 0.392.
2. Cette fois-ci, tout ce qui nous intéresse est que nos huit têtes de série soient dans des huitièmes de tableau différents. Il y a huit huitièmes de tableau constitués chacun de huit joueurs. Si on se fiche de l'ordre à l'intérieur de chaque huitième de tableau et de l'ordre des huitièmes de tableau, il y a $\binom{64}{8} \times \binom{56}{8} \times \dots \times \binom{8}{8} \times \frac{1}{8!} = \frac{64!}{8! \times 56!} \times \frac{56!}{48! \times 8!} \times \dots \times \frac{8!}{8! \times 0!} \times \frac{1}{8!} = \frac{64!}{(8!)^9}$ possibilités. Si on impose une tête de série dans chaque huitième de tableau, il reste à répartir les 56 concurrents restants en 8 paquets de 7, ce qui se fait de $\frac{56!}{(7!)^8 \times 8!}$ (calcul très similaire au précédent), et à multiplier par 8! pour distribuer aléatoirement les huit têtes de série dans chacun de ces paquets. La probabilité cherchée vaut $\frac{56!}{(7!)^8} \times \frac{(8!)^9}{64!} = \frac{8^8 \times 8!}{57 \times 58 \times \dots \times 64} \simeq 0.00379$. Autant dire que c'est très improbable.

Exercice 11 (*)

Pour bien comprendre comment ça se passe le mieux est de commencer par retraduire clairement l'énoncé en utilisant les notations ensemblistes vues en cours. Notons ici A l'événement « être malade » et B l'événement « être testé positif ». L'énoncé nous donne les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(A) = 0.01$, $\mathbb{P}_A(B) = 0.95$ et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = 0.001$. On peut calculer la probabilité de B en utilisant la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = 0.01 \times 0.95 + (1 - 0.01) \times 0.001 = 0.01049$. La probabilité qui nous est demandée est $\mathbb{P}_B(A)$, qui va être obtenue par la formule de Bayes :

$\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{0.95 \times 0.01}{0.1049} \simeq 0.91$. On a donc une grosse majorité des gens testés positifs qui sont malades, mais les faux positifs ne sont pas vraiment négligeables.

En modifiant les données c'est encore nettement pire : désormais $\mathbb{P}(A) = 0.001$ et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = 0.005$. On obtient alors $\mathbb{P}(B) = 0.001 \times 0.95 + 0.999 \times 0.005 = 0.005945$, puis $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{0.001 \times 0.95}{0.005945} \simeq 0.16$. Cette fois-ci, seule une personne sur six ayant testée positive est effectivement malade ! C'est en fait normal : il y a une personne sur 1 000 qui est malade (et sera donc quasi certainement testée positive) mais parmi les non malades, cinq personnes sur 1 000 sont testées positives, ce qui fait à peu près cinq fois plus de gens que la quantité de malades.

Exercice 12 (*)

Notons S l'évènement « L'individu est sans opinion », P : « Il est favorable à la paix » et G : « Il est favorable à la guerre ». On notera également A et B les évènements correspondant à l'appartenance à l'un des deux pays.

1. C'est une simple application de la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}_A(S) = 1 - \mathbb{P}_A(G) - \mathbb{P}_A(P) = 1 - 0.16 - 0.6 = 0.24$, et de même $\mathbb{P}_B(S) = 0.2$, donc $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(S) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(S) = 0.5 \times 0.24 + 0.5 \times 0.2 = 0.22$.
2. C'est cette fois-ci la formule de Bayes qui va être utile : $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(G) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(G) = 0.5 \times 0.16 + 0.5 \times 0.68 = 0.42$, donc $\mathbb{P}_G(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(G)}{\mathbb{P}(G)} = \dfrac{0.5 \times 0.16}{0.42} \simeq 0.19$ (la probabilité de G ayant été calculée comme au-dessus à l'aide des probabilités totales)
3. Même chose qu'au-dessus : $\mathbb{P}(P) = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.12 = 0.36$, donc $\mathbb{P}_P(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(P)}{\mathbb{P}(P)} = \dfrac{0.5 \times 0.6}{0.36} \simeq 0.83$.

Exercice 13 (**)

1. La probabilité dépend évidemment du nombre de boules blanches dans l'urne. Notons donc A_i l'évènement « il y a i boules blanches dans l'urne » pour i variant entre 0 et 3. On a $\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(A_3) = \dfrac{1}{8}$ (on doit obtenir respectivement trois Faces ou trois Piles lors des lancers de pièces). On calcule ensuite $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \dfrac{3}{8}$ (trois cas sur les huit possibles à chaque fois, il faut simplement choisir la pièce qui va tomber sur Pile (ou sur Face)). Passons désormais aux calculs de probas conditionnelles : $\mathbb{P}_{A_i}(B_1) = \dfrac{i}{3}$ (il y a trois boules dans l'urne dont i sont blanches). On peut alors appliquer la formule des probabilités totales : les évènements A_i forment un système complet, donc $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}(B_1) + \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B_1) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B_1) + \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}_{A_3}(B_1) = \dfrac{1}{8} \times 0 + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{8} \times 1 = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}$. Il est maintenant temps de se rendre compte que ce résultat était complètement évident : les boules blanches et noires jouent un rôle complètement identique, il y a donc la même probabilité de tirer une boule noire ou une boule blanche au premier tirage. C'est d'ailleurs rigoureusement pareil pour le tirage de la deuxième boule ! On aura aussi $\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{1}{2}$. Par contre, il semble peu probable que les deux évènements soient indépendants. Vérifions-le : $\mathbb{P}_(A_0)(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}_{A_1}(B_1 \cap B_2) = 0$ (on ne peut pas tirer deux boules blanches dans l'urne s'il n'y en a pas au moins deux), $\mathbb{P}_{A_2}(B_1 \cap B_2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$ (il faut laisser l'unique boule noire dans l'urne après les deux premiers tirages), et $\mathbb{P}_{A_3}(B_1 \cap B_2) = 1$. À nouveau à l'aide de la formule des probabilités

totales, on a donc $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$. En fait, les évènements sont bel et bien indépendants puisque $\mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{4}$.
Il est maintenant temps de se rendre compte que l'énoncé de l'exercice était manifestement faux, puisqu'on nous parle de tirages sans remise mais qu'on nous demande aux questions suivantes ce qui se passera lors du quatrième tirage alors qu'il n'y a que trois boules dans l'urne. Supposons donc plutôt que les tirages se font **avec** remise, et reprenons la première question avec cette hypothèse. On a toujours $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{2}$ (cette fois, l'égalité des deux est évidente), mais $\mathbb{P}_{A_1}(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{9}$ (on peut tirer deux fois la boule blanche), et $\mathbb{P}_{A_2}(B_1 \cap B_2) = \frac{4}{9}$, ce qui donne $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{9} + \frac{3}{8} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{3}$, et les évènements ne sont plus du tout indépendants.

2. Toujours avec des tirages sans remise, on doit calculer de façon similaire à la fin de la question précédente $\frac{3}{8} \times \frac{1}{3^n} + \frac{3}{8} \times \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{8} = \frac{1 + 2^n + 3^{n-1}}{8 \times 3^{n-1}}$.
3. Notons C l'évènement « on tire trois boules blanches lors des trois premiers tirages », la question précédente donne $\mathbb{P}(C) = \frac{1+8+9}{8 \times 9} = \frac{18}{72} = \frac{1}{4}$. On applique alors la formule de Bayes pour calculer $\mathbb{P}_C(A_3) = \frac{\mathbb{P}_{A_3}(C) \times \mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1 \times \frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.
4. On veut donc calculer $\mathbb{P}_C(B_4) = \frac{\mathbb{P}(B_4 \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$. D'après la deuxième question, $\mathbb{P}(B_4 \cap C) = \frac{1+16+27}{8 \times 27} = \frac{44}{8 \times 27} = \frac{11}{54}$, donc la probabilité recherchée est égale à $\frac{\frac{11}{54}}{\frac{1}{4}} = \frac{22}{27}$.

Exercice 14 (***)

Il faut utiliser la formule des probabilités totales : pour chaque entier k, on a une chance sur n de tirer l'urne numéro k, et une fois cette urne choisie, la probabilité de tirer deux boules rouges à l'intérieur vaut $\frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}}$ (n boules au total, donc $\binom{n}{2}$ tirages possibles, dont $\binom{n-k}{2}$ où l'on tire deux boules rouges). On a donc une probabilité totale de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{2}$. Or, en faisant le changement de variable $k \to n-k$, $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (k^2 - k) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} - \frac{(n-1)n}{4}$. La probabilité recherchée vaut donc $\frac{2n-1}{6n} - \frac{1}{2n} = \frac{2n-4}{6n}$. Plus intéressant, la limite quand n tend vers $+\infty$ de cette probabilité vaut $\frac{1}{3}$. Autrement dit, quand n devient grand, on se rapproche d'une situation où obtenir deux boules rouges, deux blanches ou une de chaque couleur est équiprobable.

Si le tirage s'effectue avec remise, la probabilité d'obtenir deux boules rouges lorsqu'on tire dans l'urne numéro k vaut désormais $\left(\frac{n-k}{n}\right)^2$, soit une probabilité totale de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (n^2 + k^2 - 2nk) = \frac{1}{n^3}(n^3 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2(n+1)) = 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1) - 6n}{6n^2} = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}$. Cette probabilité a également pour limite $\frac{1}{3}$.

Exercice 15 (**)

1. Si les deux parents sont AA, l'enfant sera forcément AA, ce qui se produit avec une fréquence x^2. Mais on peut aussi avoir un enfant AA avec deux parents AB (probabilité $4z^2$), avec probabilité conditionnelle égale à $\frac{1}{4}$ (une chance sur deux pour chaque parent de transmettre le gène A), soit donc une probabilité de l'intersection égale à z^2. Enfin, si l'un des parents est AA et l'autre AB (probabilité $2 \times x \times 2z = 4xz$ puisqu'il faut choisir lequel des deux parents est AA), on aura une chance sur deux d'avoir un enfant AA, ce qui donne une probabilité supplémentaire égale à $2xz$. Bien sûr, si au moins l'un des deux parents est BB, leur enfant ne pourra jamais être AA. Finalement, la probabilité d'avoir un enfant AA vaut $x^2 + z^2 + 2xz = (x + z)^2$.

   On fait le même type de calcul pour obtenir la probabilité qu'un enfant soit BB : soit les deux parents sont BB (proba y^2), soit les deux AB (proba z^2 comme ci-dessus), soit l'un des deux est BB et l'autre AB (proba $2yz$), pour une probabilité totale de $(y + z)^2$ (de toute façon, le gène A et le gène B jouant un rôle parfaitement symétrique, on doit obtenir la même formule que ci-dessus avec simple échange de x et de y). Enfin, la fréquence d'apparition de AB peut être obtenue par passage au complémentaire, elle est égale à $1 - (x + z)^2 - (y + z)^2 = 1 - x^2 - z^2 - 2xz - y^2 - z^2 - 2yz$. Or, on sait que $x + y + 2z = 1$, donc $1 = (x + y + 2z)^2 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$, ce qui permet de simplifier la proba en $2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 2(z + x)(z + y)$.
2. En posant $X = (x + z)^2$, $Y = (y + z)^2$ et donc $Z = (z + x)(z + y)$, les fréquences d'apparition des gènes à la deuxième génération sont de la même forme que celles données à la première génération. On peut donc réappliquer les formules obtenues à la question précédente sans démonstration pour la troisième génération : la fréquence d'apparition de AB sera désormais égale à $(X + Z)^2 = ((x + z)^2 + (x + z)(y + z))^2 = (x + z)^2(x + z + y + z)^2 = (x + z)^2$ puisque $x + 2z + y = 1$. On constate que cette fréquence est exactement la même que pour la deuxième génération. Bien sûr, un calcul identique à permutation des variables près donnera $(Y + Z)^2 = (y + z)^2$, puis par passage au complémentaire la fréquence d'apparition de AB sera également inchangée. Finalement, toutes les fréquences deviennent constantes à partir de la deuxième génération.

Exercice 16 (**)

Notons T l'évènement « On lance un dé truqué » et N : « On lance un dé normal ». D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(T) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ et $\mathbb{P}(N) = \frac{4}{5}$. De plus, $\mathbb{P}_T(6) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}_T(1) = \mathbb{P}_T(2) = \mathbb{P}_T(3) = \mathbb{P}_T(4) = \mathbb{P}_T(5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.

1. Probabilités totales : $\mathbb{P}(6) = \mathbb{P}(N) \times \mathbb{P}_N(6) + \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(6) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{30} \simeq 0.23$.
2. Formule de Bayes : $\mathbb{P}_6(T) = \dfrac{\mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(6)}{\mathbb{P}(6)} = \dfrac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{30}} = \frac{3}{7} \simeq 0.42$.
3. Probabilités totales puis Bayes : $\mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(N) \times \mathbb{P}_N(2) + \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{23}{150}$, puis $\mathbb{P}_2(N) = \dfrac{\mathbb{P}(N) \times \mathbb{P}_N(2)}{\mathbb{P}(2)} \dfrac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{6}}{\frac{23}{150}} = \frac{20}{23} \simeq 0.87$.

Exercice 17 (**)

Il s'agit une fois de plus d'une combinaison de probabilités totales et de formule de Bayes. Notons A : « On tire dans la première urne » et B : « On tire deux boules rouges ». On a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{6}{9} \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{5}{12}$ et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = \dfrac{3}{9} \times \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{12}$. On en déduit dans un premier temps $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4}$, puis $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{12}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{6}$.

Dans le cas où on effectue une remise, le raisonnement est le même mais, en gardant les mêmes notations, $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{6}{9} \times \dfrac{6}{9} = \dfrac{4}{9}$ et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = \dfrac{3}{9} \times \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{9}$. On en déduit dans un premier temps $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{18}$, puis $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}}{\frac{5}{18}} = \dfrac{4}{5}$. La probabilité est légèrement plus faible que dans le cas du tirage avec remise.

Exercice 18 (***)

1. Il s'agit d'une « simple » application de la formule sans nom dans le sens inhabituel, assortie d'une petite astuce belge : $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{i=p}^{n} (i+1)\binom{i}{p} - \binom{i}{p} = \sum_{i=p}^{n} (p+1)\binom{i+1}{p+1} - \sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p}$, exactement la formule souhaitée.
2. D'après la formule de Pascal, on peut écrire $\dbinom{i}{p} = \dbinom{i+1}{p+1} - \dbinom{i}{p+1}$ pour obtenir à droite de notre égalité précédente une somme télescopique : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \sum_{p=i}^{n} \binom{i+1}{p+1} - \binom{i}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{1}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ puisque $p+1 \geqslant 2$, le deuxième coefficient binômial est donc nul (si ça vous embête d'avoir des coefficients binômiaux aberrants, il faut légèrement modifier les formules pour tenir compte de l'indice à partir duquel on obtient des coefficients nuls). La première somme est la même à un décalage d'indices près : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} \binom{i+1}{p+1} = \sum_{i=p}^{n} \binom{i+2}{p+2} - \binom{i+1}{p+2} = \binom{n+2}{p+2}$. Finalement, on obtient $S_{n,p} = (p+1)\dbinom{n+2}{p+2} - \dbinom{n+1}{p+1}$.
3. Puisque la probabilité doit être de la forme $\dfrac{i}{k}$ et que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, on aura, en notant U_i l'évènement consistant à tirer dans l'urne numéro i, $\mathbb{P}(U_i) = \dfrac{2i}{n(n+1)}$.
4. Si on tire dans l'urne numéro i, la probabilité de ne tirer que des boules blanches lors de p tirages simultanés sera égale à $\mathbb{P}_{U_i}(A) = \dfrac{\binom{i}{p}}{\binom{n+1}{p}}$. Il suffit ensuite d'appliquer la formule des probabilités totales (les évènements U_i formant évidemment un système complet) pour trouver $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_i)\mathbb{P}_{U_i}(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n(n+1)} \times \frac{\binom{i}{p}}{\binom{n+1}{p}}$. On peut en fait faire démarrer la somme à $i = p$ puisqu'on ne peut bien sûr pas tirer p boules blanches dans une urne qui en contient moins. On reconnait alors $\mathbb{P}(A) = \dfrac{2}{n(n+1)} \dfrac{S_{n,p}}{\binom{n+1}{p}}$, donc $P(A) = \dfrac{2}{n(n+1)} \dfrac{1}{\binom{n+1}{p}} \left((p+1)\dbinom{n+2}{p+2} - \dbinom{n+1}{p+1} \right)$.

5. Simplifions les quotients qui apparaissent en développant le calcul précédent : $\dfrac{\binom{n+2}{p+2}}{\binom{n+1}{p}} = \dfrac{(n+2)!p!(n+1-p)!}{(p+2)!(n-p)!(n+1)!} = \dfrac{(n+1-p)(n+2)}{(p+2)(p+1)}$, et $\dfrac{\binom{n+1}{p+1}}{\binom{n+1}{p}} = \dfrac{(n+1)!p!(n+1-p)!}{(p+1)!(n-p)!(n+1)!} = \dfrac{n+1-p}{p+1}$. On en déduit que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{2}{n(n+1)}\left(\dfrac{(n+1-p)(n+2)}{p+2} - \dfrac{n+1-p}{p+1}\right)$. La parenthèse étant équivalente quand n tend vers $+\infty$ à $\dfrac{n^2}{p+2}$ (le deuxième terme est de degré 1) et le facteur devant la parenthèse à $\dfrac{2}{n^2}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A) = \dfrac{2}{p+2}$.
6. On va passer par le complémentaire : la proba de ne tirer aucune boule blanche dans l'urne i vaut $\mathbb{P}_{U_i}(\overline{B}) = \dfrac{\binom{n+1-i}{p}}{\binom{n+1}{p}}$, donc $\mathbb{P}(\overline{B}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{2i}{n(n+1)} \dfrac{\binom{n+1-i}{p}}{\binom{n+1}{p}}$. Quitte à effectuer le changement d'indice $j = n+1-i$ (ce qui revient à compter les urnes en sens inverse) et à éliminer les termes trivialement nuls, $\mathbb{P}(\overline{B}) = \displaystyle\sum_{j=p}^{n} \dfrac{2(n+1-j)}{n(n+1)} \dfrac{\binom{j}{p}}{\binom{n+1}{p}}$. On peut séparer cette somme en deux en découpant le $n+1-j$ du numérateur en un terme égal à $n+1$ (on simplifiera avec le dénominateur) et un égal à $-j$ qui va faire apparaitre exactement la probabilité de A calculée plus haut : $\mathbb{P}(\overline{B}) = \dfrac{2}{n\binom{n+1}{p}} \displaystyle\sum_{j=p}^{n} \binom{j}{p} - P(A)$. On a déjà calculé cette somme lors de la deuxième question : $\mathbb{P}(\overline{B}) = \dfrac{2}{n\binom{n+1}{p}} \times \dbinom{n+1}{p+1} - P(A) = \dfrac{2(n-p+1)}{n(p+1)} - P(A)$. Finalement, $P(B) = 1 + P(A) - \dfrac{2(n-p+1)}{n(p+1)}$.

Exercice 19 (**)

Commençons par traduire les hypothèses de l'énoncé : au jour 0, la place n'est pas réservée, donc $p_0 = 1$. Ensuite, en notant A_n l'évènement « La place est réservée au jour n », l'énoncé stipule que $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{9}{10}$ et $\mathbb{P}_{\bar{A_n}}(A_{n+1}) = \dfrac{4}{10}$. La formule des probabilités totales donne alors la formule de récurrence : $p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\bar{A_n}) \times \mathbb{P}_{\bar{A_n}}(A_{n+1}) = \dfrac{9}{10} \times p_n + \dfrac{4}{10} \times (1-p_n) = 0.5p_n + 0.4$. La suite (p_n) est donc arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{5}$, ce qui donne $x = \dfrac{4}{5}$. On introduit la suite auxiliaire $b_n = p_n - \dfrac{4}{5}$, qui vérifie $b_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{2}\left(p_n - \dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{1}{2}b_n$. La suite (b_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{4}{5}$ et de premier terme $b_0 = -\dfrac{4}{5}$, donc $b_n = -\dfrac{4}{5} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $p_n = b_n + \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5} \times \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$. On constate que la limite de la suite p_n vaut $\dfrac{4}{5}$ et que la suite est croissante, c'est-à-dire que la proportion de places réservées dans l'avion va augmenter, mais en ne dépassant pas un plafond de 80%.

Exercice 20 (***)

1. Un petit schéma peut aider, mais n'est pas obligatoire. On a bien sûr $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$ puisque la guêpe se trouve dans la pièce A au départ. Ensuite, on utilise l'énoncé, on a donc

$a_1 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{2}{3}$ et $c_1 = 0$. Pour l'étape suivante, il faut utiliser la formule des probabilités totales : $a_2 = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) + \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(A_2) + \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(A_2) = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$, de même, $b_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{2}b_2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$ et $c_2 = \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{6}$ (on note que $a_2 + b_2 + c_2 = \frac{5}{18} + \frac{5}{9} + \frac{1}{6} = 1$, ce qui est plutôt rassurant).

2. Il s'agit d'une simple généralisation du cas précédent utilisant toujours les probabilités totales : $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$, $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + c_n$.
3. Pour montrer que u_n est constante, le plus simple est de calculer u_{n+1}. On a $u_{n+1} = \frac{6}{10}a_{n+1} - \frac{3}{10}b_{n+1} = \frac{6}{10}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) - \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n\right) = \frac{2}{10}a_n + \frac{3}{20}b_n - \frac{2}{10}a_n - \frac{3}{20}b_n = 0$. La suite u_n est donc nulle (au moins à partir de $n = 1$).
4. Tentons d'exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. On a $v_{n+1} = \frac{4}{10}a_{n+1} + \frac{3}{10}b_{n+1} = \frac{4}{10}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n\right) = \frac{4}{30}a_n + \frac{1}{10}b_n + \frac{2}{10}a_n + \frac{3}{20}b_n = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n = \frac{5}{6}\left(\frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n\right)$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et de premier terme $v_0 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, donc $v_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
5. On constate que $u_n + v_n = a_n$, donc $a_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et, comme $u_n = 0$, $b_n = 2a_n = \frac{4}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
6. On a bien entendu $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - 3a_n = 1 - \frac{6}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Cette probabilité tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Exercice 21 (***)

Le nombre de jetons dans la poignée tirée peut varier entre 0 et n. Notons donc, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$, A_i l'évènement « On a tiré une poignée contenant i jetons ». L'énoncé stipule que ces évènements sont équiprobables, autrement dit que $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n+1}$. On notera par ailleurs simplement 1 l'évènement « On tire le jeton numéro 1 ». On a $\mathbb{P}_{A_i}(1) = \frac{i}{n}$ (si on tire une poignée de i jetons et qu'il y en a n au total, on a i chances sur n qu'un jeton précis soit tiré ; si vous n'êtes pas convaincus, on peut aussi dire que $|A_i| = \binom{n}{i}$ et $|A_i \cap B| = \binom{n-1}{i-1}$ puisqu'une fois choisi le jeton 1, il reste $i - 1$ jetons à tirer parmi les $n - 1$ restants dans l'urne, donc $\mathbb{P}_{A_i}(1) = \frac{\binom{n-1}{i-1}}{\binom{n}{i}} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \times \frac{i!(n-i)!}{n!} = \frac{i}{n}$). Les évènements A_i formant un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(1) = \sum_{i=0}^{i=n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(1) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{n+1} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$. Ce résultat est en fait assez prévisible : si tous les nombres de jetons possibles sont équiprobables, on tirera en moyenne la moitié des jetons, et on donc autant de chances de tirer le numéro 1 que de ne pas le tirer.

On a bien sûr de même $\mathbb{P}(2) = \frac{1}{2}$. Pour déterminer si le tirage des jetons 1 et 2 est indépendant, le plus simple est de calculer $\mathbb{P}(1 \cap 2)$ et de regarder si on obtient la même valeur qu'en faisant $\mathbb{P}(1) \times \mathbb{P}(2)$. Le calcul de $\mathbb{P}(1 \cap 2)$ est très similaire à celui effectué ci-dessus : $|A_i \cap 1 \cap 2| = \binom{n-2}{i-2}$, donc $\mathbb{P}_{A_i}(1 \cap 2) = \dfrac{\binom{n-2}{i-2}}{\binom{n}{i}} = \dfrac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)!} \times \dfrac{i!(n-i)!}{n!} = \dfrac{i(i-1)}{n(n-1)}$. On applique ensuite la formule des probabilités totales pour obtenir $\mathbb{P}(1 \cap 2) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} \times \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} \sum_{i=0}^{n} i^2 - i = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{2n+1-3}{6(n-1)} = \frac{1}{3}$. Cette probabilité étant différente de $\mathbb{P}(1) \times \mathbb{P}(2) = \dfrac{1}{4}$, les deux évènements ne sont pas indépendents. Autre façon de voir les choses : $\mathbb{P}_1(2) = \dfrac{\mathbb{P}(1 \cap 2)}{\mathbb{P}(1)} = \dfrac{2}{3}$. On peut interpréter ce résultat ainsi : si le jeton 1 a été tiré, il est plus probable qu'on ait tiré une grosse poignée qu'une petite poignée, ce qui augmente nettement la probabilité que le jeton 2 ait également été tiré (mais pour être tout à fait honnête, ce résultat n'était pas évident à prévoir).

Dans le cas où ce sont les poignées qui sont équiréparties, comme il existe 2^n poignées (autant que de sous-ensembles de l'ensemble des n jetons placés dans l'urne), chaque poignée a une probabilité $\dfrac{1}{2^n}$ d'être tirée. Comme il existe $\dbinom{n}{i}$ poignées contenant i jetons, on a donc $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{\binom{n}{i}}{2^n}$. On peut alors effectuer le même type de calcul que précédemment à l'aide des probabilités totales (la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{A_i}(1)$ n'a pas de raison d'avoir changé) : $\mathbb{P}(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = \frac{1}{2^n} \times 2^{n-1} = \frac{1}{2}$. On retrouve donc la même probabilité que tout à l'heure, ce qui est en fait normal si on se souvient que les coefficients binomiaux ont une propriété de symétrie : on a autant de chances de tirer une poignée à 0 éléments qu'une poignée à n éléments, une poignée à 1 élément qu'une à $n-1$ éléments etc, ce qui donnera toujours en moyenne une chance sur deux de tirer un jeton donné.

Comme tout à l'heure, on aura donc $\mathbb{P}(1) \times \mathbb{P}(2) = \dfrac{1}{4}$, et on cherche à calculer $\mathbb{P}(1 \cap 2)$, toujours avec les probabilités totales en utilisant le système complet d'évènements A_i : $\mathbb{P}(1 \cap 2) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=2}^{n} \binom{n-2}{i-2} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n-2}{i} = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$. Cette fois-ci, les deux évènements sont indépendants. Comme j'en entends déjà qui se demandent « Mais pourquoi l'argument donné tout l'heure pour justifier que les évènements n'étaient pas indépendants ne serait-il plus valable dans ce cas ? », j'essaie de leur répondre : ici, la probabilité de tirer un certain nombre de jetons est fortement pondéré par le nombre de poignées contenant ce nombre de jetons. Ainsi, si on sait qu'on a tiré le jeton 1, on sait simplement que la poignée choisie fait partie de la moitié des poignées qui contiennent le jeton 1. Mais parmi celles-ci, il y en a exactement la moitié qui contiennent le jeton 2 et la moitié qui ne le contiennent pas ! En effet, parmi les sous-ensembles contenant le jeton 1, il y en a autant qui contiennent le jeton 2 et qui ne le contiennent pas, et contrairement à tout à l'heure on affecte la même probabilité à chacune.

Exercice 22 (***)

1. Supposons donc que le joueur 1 ait n euros à un certain moment du jeu, avec $1 \leqslant n \leqslant 99$ (sinon le jeu s'arrête puisqu'un des deux joueurs est ruiné). On effectue alors une partie supplémentaire. Si le joueur 1 gagne (ce qui se produit avec une probabilité p), il aura alors

alors $n+1$ euros en poche, et donc une probabilité p_{n+1} de finir ensuite ruiné. Mais s'il perd, il aura de même une probabilité p_{n-1} de finir ruiné. Une simple application de la formule des probabilités totales avec les deux évènements « Joueur 1 gagne la partie suivante » et « Joueur 1 perd la partie suivante » donne donc $p_n = p \times p_{n+1} + (1-p) \times p_{n-1}$.

2. La suite (p_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $x = px^2 + (1-p)$, soit $px^2 - x + 1 - p = 0$ (attention à bien mettre les puissances aux bon endroit !) admet $x = 1$ pour solution évidente, et a pour deuxième racine $x_2 = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1$. On en déduit que $p_n = A + B\left(\frac{1}{p} - 1\right)^n$, avec A et B deux constantes réelles (techniquement, la formule n'est valable que pour $0 \leqslant n \leqslant 100$). Or, on sait que $p_0 = 1$ (si le joueur 1 a atteint la somme de 0 euro, il est par définition ruiné), et au contraire $p_{100} = 0$ (si le joueur 1 a atteint 100 euros, le joueur 2 est ruiné et le joueur 1 ne peut donc plus le devenir). C'est inhabituel de prendre le terme d'indice 100 comme condition initiale, mais ici c'est plus facile. On a donc $A + B = 1$, et $A + B\left(\frac{1}{p} - 1\right)^{100} = 0$, donc en soustrayant les deux équations $B - B \times \frac{(1-p)^{100}}{p^{100}} = 1$ soit $B = \frac{p^{100}}{p^{100} - q^{100}}$ en notant $q = 1 - p$ pour simplifier un peu les notations (la formule ne sera pas valable dans le cas où $p = q = \frac{1}{2}$, auquel cas on a $x_1 = x_2$). Comme $A + B = 1$, on a donc $A = -\frac{q^{100}}{p^{100} - q^{100}}$. Autrement dit, $p_n = \frac{1}{p^{100} - q^{100}}\left(p^{100} \times \frac{q^n}{p^n} - q^{100}\right)$. Par exemple, pour $n = 50$ (la valeur initiale de l'énoncé), on trouve donc $p_{50} = \frac{(pq)^{50} - q^{100}}{p^{100} - q^{100}}$. Si $p = 0.51$ par exemple, on trouve $p_{50} \simeq 0.119$ (c'est logiquement assez faible, même si l'écart de probabilité de gain entre les deux joueurs est minime). Si $p = 0.6$, on descend carrément à $p_{50} \simeq 1.56 \times 10^{-9}$ (il faut donner 11 euros initialement au joueur 1 pour que sa proba de ruine dépasse 1% avec $p = 0.6$).

   Pour être tout à fait complet, traitons le cas où $p = q = \frac{1}{2}$. Puisqu'on a une racine double égale à 1 à l'équation caractéristique, on aura alors $p_n = A + Bn$, avec $p_0 = A = 1$, et $p_{100} = A + 100B = 0$, donc $B = -\frac{1}{100}$. On en déduit que $p_n = 1 - \frac{n}{100}$, avec tout à fait logiquement $p_{50} = \frac{1}{2}$ dans ce cas.

3. On effectue le même raisonnement pour calculer q_n : en gardant les notations de la première question, on a $q_n = p \times q_{n-1} + q \times q_{n+1}$, suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x = p + qx^2$. On oublie le cas $p = q = \frac{1}{2}$ qui donne la même formule qu'à la première question, et on a 1 qui est à nouveau racine évidente, et la deuxième racine égale à $\frac{p}{q}$. On en déduit $q_n = A + B\left(\frac{p}{q}\right)^n$, avec $q_0 = A + B = 0$ et $q_{100} = A + B\left(\frac{p}{q}\right)^{100} = 1$. On obtient finalement $q_n = \frac{1}{p^{100} - q^{100}}\left(p^{100} - p^{100} \times \frac{q^n}{p^n}\right)$. On constate que $p_n + q_n = 1$, ce qui prouve que, quelle que soit la situation initiale, on a une probabilité 1 que l'un des deux joueurs finisse ruiné. Autrement dit, les situations où on reste indéfiniment avec les deux joueurs entre 1 et 99 euros ont une probabilité nulle (c'est aussi le cas si $p = q$, ce qui est un peu moins intuitif).

Exercice 23 (***)

1. En utilisant les notations introduites dans la question 3 de l'énoncé, on a ici $\mathbb{P}(M_1) = \mathbb{P}(M_2) = p$, et le comportement des deux moteurs étant indépendant, $\mathbb{P}(M_1 \cap M_2) = p \times p = p^2$. On

en déduit que $\mathbb{P}(M_1 \cup M_2) = \mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(M_2) - \mathbb{P}(M_1 \cap M_2) = 2p - p^2 = p(2-p)$.

2. Puisque l'avion à deux moteurs s'écrase dès qu'au moins l'un des deux moteurs tombe en panne, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{M_1 \cup M_2}) = 1 - p(2-p)$.
3. L'avion s'écrase dès qu'au moins deux des moteurs tombent en panne, soit $B = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \cup (M_1 \cap M_4) \cup (M_2 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_4) \cup (M_3 \cap M_4)$.
4. On peut bien sûr appliquer la formule de Poincaré à l'union précédente, mais comme elle est composée de six événements, ça risque d'être très lourd (en fait, beaucoup d'intersections sont vides, ce qui rend le calcul possible). Essayons une autre approche, en notant B_2 l'événement « Deux moteurs **exactement** parmi les quatre tombent en panne pendant le vol », et similairement pour B_3 et B_4. On a alors assez clairement $B = B_2 \cup B_3 \cup B_4$ (union disjointe puisqu'on a précisé exactement le nombre de moteurs tombant en panne). Or, $\mathbb{P}(B_4) = p^4$ (chaque moteur tombe en panne, indépendamment les uns des autres), $\mathbb{P}(B_3) = 4p^3(1-p)$ (en effet, on a par exemple $\mathbb{P}(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M_4}) = p \times p \times p \times (1-p) = p^3(1-p)$, et il faut encore choisir quel moteur parmi les quatre va survivre). Enfin, pour deux moteurs exactement, il y a $\binom{4}{2} = 6$ façons de choisir les deux moteurs qui vont tomber en panne, donc $\mathbb{P}(B_2) = 6p^2(-1-p)^2$. Finalement, $\mathbb{P}(B) = p^4 + 4p^3(1-p) + 6p^2(1-p)^2$.
5. Calculons donc $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - 2p(1-p) - 1 + p^4 + 4p^3(1-p) + 6p^2(1-p) = 2p + p^2 + p^4 + 4p^3 - 4p^4 + 6p^2 - 12p^3 + 6p^4 = p(2 + 7p - 8p^2 + 3p^3)$. La parenthèse a pour racine évidente $p = 1$, on peut donc factoriser $2 + 7p - 8p^2 + 3p^3 = (p-1)(ap^2 + bp + c) = ap^3 + (b-a)p^2 + (c-b)p + c$, dont on déduit $a = 3$, $b - a = -8$ et $c - b = 7$, donc $b = -5$ et $c = 2$. On obtient $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\overline{B}) = p(p-1)(3p^2 - 5p + 2)$. La dernière parenthèse a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et admet deux racines $p_1 = \frac{5+1}{6} = 1$ et $p_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$. Conclusion de ce passionnant calcul : $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\overline{B}) = 3p(p-1)^2\left(p - \frac{2}{3}\right)$. On peut alors faire le tableau de signes suivant :

p		0		$\frac{2}{3}$		1	
$(1-p)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$p - \frac{3}{2}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\overline{B})$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

6. On constate que, pour les valeurs 0 et 1, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{B})$, ce qui signifie que les deux moteurs ont la même probabilité de s'écraser en vol. C'est logique puisque, lorsque $p = 0$, les moteurs ne tombent jamais en panne (peu importe combien il y en a, on arrivera toujours à bon port), et au contraire lorsque $p = 1$, tous les moteurs tomberont systématiquement en panne, et l'avion, à deux moteurs comme à quatre, coulera.
7. Au vu du tableau de signe précédent, lorsque $p \leqslant \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(\overline{B})$, donc l'avion à deux moteurs est moins fiable que l'avion à quatre moteurs, il est préférable d'opter pour le quadrimoteur. Par contre, si $p \geqslant \frac{2}{3}$, et en supposant qu'on tienne encore à effectuer le voyage, il vaudra mieux prendre l'avion à deux moteurs (dans ce cas, on aura moins d'une chance sur neuf d'arriver vivant).
8. Notons C l'événement « L'avion à six moteurs s'écrase comme une merde au beau milieu de l'Atlantique ». On peut calculer $\mathbb{P}(C)$ de la même façon qu'on a calculé $\mathbb{P}(B)$: on a au choix exactement trois, quatre, cinq ou six moteurs qui vont tomber en panne, et qu'il faut choisir parmi les six moteurs de l'avion. On obtient alors $\mathbb{P}(C) = \binom{6}{3} \times p^3 \times (1-p)^3 + \binom{6}{4} \times p^4 \times (1-p)^2 + \binom{6}{5} \times p^5 \times (1-p) + p^6 = 20p^3(1 - 3p + 3p^2 - p^3) + 15p^4(1 - 2p + p^2) + 6p^5(1-p) + p^6 = 20p^3 - 60p^4 + 60p^5 - 20p^6 + 15p^4 - 30p^5 + 15p^6 + 6p^5 - 6p^6 + p^6 = 20p^3 - 45p^4 + 36p^5 - 10p^6$.

On peut enchaîner sur le calcul de $\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(C) = 6p^2-8p^3+3p^4-20p^3+45p^4-36p^5+10p^6 = p^2(6-28p+48p^2-36p^3+10p^4)$. Factoriser le polynôme de degré 4 de la parenthèse ne donne pas très envie, mais on sait déjà que 1 doit en être une racine évidente (l'argument probabiliste de la question 6 tient toujours). En effet c'est le cas, donc $10p^4-36p^3+48p^2-28p+6 = (p-1)(ap^3+bp^2+cp+d) = ap^4+(b-a)p^3+(c-b)p^2+(d-c)p+d$. On a donc $a = 10$, puis $b-a = -36$, donc $b = -26$, $c-b = 48$ soit $c = 22$, et enfin $d-c = -28$ donc $d = -6$, soit $\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(C) = p^2(p-1)(10p^3-26p^2+22p-6)$. Encore un polynôme de degré 3 dans la parenthèse, c'est ballot. Mais gros coup de pot, 1 est encore racine évidente ! On retourne factoriser dans la joie et la bonne humeur : $10p^3-26p^2+22p-6 = (p-1)(ep^2+fp+g) = ep^3+(f-e)p^2+(g-f)p-g$, dont on déduit $e = 10$, $f-e = -26$ donc $f = -16$ et $g-f = 22$ donc $g = 6$. On progresse : $\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(C) = p^2(p-1)^2(10p-16p+6)$. Les plus observateurs remarqueront que 1 est encore et toujours racine évidente (jamais deux sans trois) mais on peut plus prosaïquement calculer son petit discriminant $\Delta = 256-240 = 16$ (oui, on pouvait aussi tout factoriser par 2 avant le calcul, je sais). Bref, il y a deux racines $p_1 = \dfrac{16+4}{20} = 1$ (je vous l'avais dit !) et $p_2 = \dfrac{16-4}{20} = \dfrac{3}{5}$. On est arrivés : $\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(C) = p^2(p-1)^3\left(p-\dfrac{3}{5}\right)$. Un tableau de signe très très similaire à celui fait un peu plus haut (les paresseux ne feront même pas de tableau de signe en isolant les facteurs positifs p^2 et $(p-1)^2$, gardant le signe du trinome qu'on vient d'étudier) permet de montrer que, si $p \leqslant \dfrac{3}{5}$, $\mathbb{P}(B) \geqslant \mathbb{P}(C)$, ce qui prouve que l'avion à six moteurs est le meilleur (on avait déjà vu que le quatre moteurs battait le deux moteurs dans cette zone). Pour $p \geqslant \dfrac{3}{5}$, le quatre moteurs est mieux. Autrement dit, jusqu'à $p = \dfrac{3}{5}$, il faut six moteurs, entre $\dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{2}{3}$, quatre c'est mieux, et au-delà de $\dfrac{2}{3}$, il faut se résoudre à placer nos maigres espoirs de survie dans l'avion à deux moteurs. On peut conjecturer que, si on s'amusait à continuer les calculs avec des avions avec huit, dix moteurs etc., on obtiendrait des zones de plus en plus proches de $p = 0$ dans lesquelles ces nouveaux avions seraient meilleurs que les précédents. Allez, on fait le calcul avec huit moteurs pour voir ! Non, vous ne voulez pas ? Vraiment ? Et si on ajoute un nombre de pilotes égal au nombre de moteurs, chacun étant bourré au point d'avoir une probabilité q de faire crasher l'avion ? Non plus ? Pfff, ces jeunes, ils ne savent plus s'amuser...

Problème (***).

1. Puisque les lancers sont supposés indépendants, la probabilité recherchée vaut bien entendu $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.
2. Question aussi ridicule que la précédente, la proba vaut $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{27}$
3. Il faut tenir compte de l'emplacement des différents résultats : $\dbinom{4}{2} = 6$ positions possibles pour les deux lancers auxquels on a obtenu Pile, puis pour chacune des six possibilités une probabilité $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{81}$ d'obtenir les deux Piles et deux Faces, soit donc une probabilité d'obtenir exactement deux Piles et deux Faces égale à $\dfrac{24}{81} = \dfrac{8}{27}$.
4. Notons A l'évènement : « on a obtenu un Pile et deux Faces lors des trois premiers lancers ». Un calcul similaire à celui de la question précédente donne $\mathbb{P}(A) = \dbinom{3}{1}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times 13 = \dfrac{2}{9}$. Notons maintenant P_2 l'évènement : « on a obtenu un Pile au deuxième lancer ». L'évènement $P_2 \cap A$ ne se produit que si les trois premiers lancers ont donné dans cet ordre les résultats Face, Pile, Face, donc $\mathbb{P}(P_2 \cap A) = \dfrac{2}{27}$, puis $\mathcal{P}_A(P_2) = \dfrac{\mathbb{P}(P_2\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\frac{2}{27}}{\frac{2}{9}} = \dfrac{1}{3}$. C'est tout

à fait logique : il existe trois suites de lancers équiprobables pouvant réaliser l'évènement A (Pile-Face-Face, Face-Pile-Face et Face-Face-Pile), chacune des trois a donc une probabilité $\frac{1}{3}$ de s'être produite si on suppose l'évènement A réalisé.

5. Notons donc B l'évènement « on a obtenu au moins un Pile lors des trois premiers lancers ». L'évènement $\overline{B}$ n'est réalisé que si on a obtenu trois Faces, donc $\mathbb{P}(\overline{B}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, et $\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$. L'évènement $P_2 \cap B$ est vérifié si P_2 est vérifié (puisque la réalisation de P_2 entraine qu'on a obtenu au moins un Pile lors des trois lancers), donc $\mathbb{P}(P_2 \cap B) = \mathbb{P}(P_2) = \frac{2}{3}$. On en déduit que $\mathbb{P}_B(P_2) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{26}{27}} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}$. Cette probabilité est très légèrement supérieure à $\frac{2}{3}$, ce qui est normal (la seule information dont on dispose est qu'on peut éliminer le rare cae où on a obtenu trois Faces, ce qui augmente un peu la probabilité d'avoir obtenu un Pile à chaque lancer).

6. Pour cette question, on notera si besoin F_n l'évènement « on a tiré Face au lancer n » et P_n l'évènement « on a tiré Pile au lancer n ». Les suites du type $FPFF$ utilisées dans l'énoncé sont bien sûr des raccourcis pratiques pour désigner des évènements du type $F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4$.
   (a) L'évènement A_2 est réalisé si et seulement si on a tiré PP lors des deux premiers tirages, donc $a_2 = \frac{4}{9}$. L'évènement A_3 est réalisé si on a tiré FPP lors des trois premiers tirages (Face obligatoire au premier tirage pour ne pas avoir deux Piles consécutifs dès le deuxième tirage), donc $a_3 = \frac{4}{27}$. Enfin, l'évènement A_4 est réalisé dans deux cas : $PFPP$ et $FFPP$ (comme précédemment, le Face au deuxième lancer est obligatoire pour éviter d'avoir trop tôt un double Pile), donc $a_4 = a_3 = \frac{4}{27}$ (le résultat du premier lancer « ne compte pas »).
   (b) Procédons comme le préconise l'énoncé : pour avoir un premier double Pile aux lancers $n+1$ et $n+2$ (réalisation de l'évènement A_{n+2}) avec $n \geqslant 2$, on a deux possibilités :
      - soit le tout premier lancer a donné Face. Dans ce cas, on peut « oublier » le premier lancer, la réalisation de A_{n+2} est équivalente au fait d'obtenir un premier double Pile aux lancers n et $n+1$ dans la suite de lancers obtenue en supprimant le premier (qui ne peut de toute façon pas contribuer à créer un double Pile). Autrement dit, $\mathbb{P}_{F_1}(A_{n+2}) = a_{n+1}$.
      - soit le premier lancer a donné Pile. Dans ce cas il faut que le deuxième lancer donne Face (pour ne pas avoir un double Pile trop tôt), et on peut ensuite oublier les résultats de ces deux premiers lancers (comme dans le premier cas) pour considérer qu'on doit avoir le premier double Pile aux lancers $n-1$ et n dans la suite de lancers ultérieurs. Autrement dit, on aura $\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2}) = a_n$.

   Pour être tout à fait rigoureux, on applique ensuite la formule des probabilités totales au système complet d'évènement constitué des trois évènements F_1, $P_1 \cap F_2$ et $F_1 \cap F_2$ (qui forment un système complet de façon évidente). Comme $\mathbb{P}_{P_1 \cap P_2}(A_{n+2}) = 0$ (on a déjà obtenu le premier double Pile bien trop tôt), on en déduit que $\mathbb{P}(A_{n+2}) = \mathbb{P}_{F_1}(A_{n+2}) \times \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2}) \times \mathbb{P}(P_1 \cap F_2) = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{9}a_n$.
   (c) La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$ a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$, et admet comme racines $x_1 = \frac{\frac{1}{3}+1}{2} = \frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{\frac{1}{3}-1}{2} = -\frac{1}{3}$. On en déduit l'existence de deux constantes A et B telles que, $\forall n \geqslant 2$, $a_n = A\left(\frac{2}{3}\right)^n + B\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Utilisons les conditions initiales pour déterminer A et

B : $a_2 = \dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{9}A + \dfrac{1}{9}B$, donc $4A+B=4$, et $a_3 = \dfrac{4}{27} = \dfrac{8}{27}A - \dfrac{1}{27}B$, donc $8A - B = 4$. En additionnant les deux équations, on obtient $12A = 8$, donc $A = \dfrac{2}{3}$, puis $B = 4 - 4A = \dfrac{4}{3}$. Finalement, $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} + \dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(d) Il s'agit d'un calcul de sommes géométriques : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + \frac{4}{3}\sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{8}{27}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} + \frac{4}{27}\sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} = \frac{8}{27}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{4}{27}\sum_{k=0}^{n-2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{8}{27}\times\frac{1-(\frac{2}{3})^{n-1}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{4}{27}\times\frac{1-(-\frac{1}{3})^{n-1}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{8}{9}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{9}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$. Cette somme a bien une limite quand n tend vers $+\infty$, égale à $\dfrac{8}{9}+\dfrac{1}{9} = 1$. Cela revient à dire qu'on finira « toujours » par obtenir un double Pile si on fait une suite infinie de lancers, ou plutôt que la probabilité de ne jamais obtenir de double Pile devient nulle.

7. (a) Utilisons la méthode intelligente à base de dérivées. On pose donc $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ qui a pour dérivée $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, soit exactement ce qu'on chercher à calculer. Or, un simple calcul de somme géométrique permet d'écrire $f(x)$ sous la forme $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. On peut donc calculer notre dérivée en dérivant simplement ce quotient : $f'(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. C'est exactement la formule qu'on devait démontrer.

(b) Si $x \in]-1,1[$, les résultats de croissance comparée montrent que $\lim nx^{n+1} = \lim (n+1)x^n = 0$, donc le calcul de la question précédente donne une limite pour la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ égale à $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Bien sûr, on en déduit immédiatement que $\lim \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. Si $x \notin]-1,1[$, le calcul précédent prouve également que la somme n'a pas de limite.

(c) En abusant légèrement des notations, on va directement calculer une somme infinie : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} ka_k = \sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + \frac{4}{3}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(-\frac{1}{3}\right)^k$. Il manque à chaque fois le terme correspondant à $k=1$ pour appliquer la formule de la question *b*. On va donc le soustraire au résultat à chaque fois : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} ka_k = \frac{2}{3}\times\left(\frac{\frac{2}{3}}{(1-\frac{2}{3})^2} - \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{3}\times\left(\frac{-\frac{1}{3}}{(1+\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\times\frac{16}{3} + \frac{4}{3}\times\frac{7}{48} = \frac{32}{9} + \frac{7}{36} = \frac{135}{36} = \frac{15}{4}$. On obtiendra donc en moyenne notre premier double Pile avant d'avoir atteint le quatrième lancer (ce qui n'est pas très surprenant quand la pièe est déséquilibrée pour tomber plus souvent sur Pile).

8. Dans ce cas plus général, on aura $a_2 = p^2$, $a_3 = p^2(1-p) = a_4$ (mêmes raisonnements que plus haut). Puis on obtient en calquant le raisonnement ci-dessus la relation de récurrence $a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n$. La suite reste récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 + (p-1)x + p(p-1) = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = (p-1)^2 - 4p(p-1) = p^2 - 2p + 1 - 4p^2 + 4p = 1 + 2p - 3p^2$. Aïe, l'équation n'a en général pas des racines sympathiques, ce qui va rendre le reste des calculs absolument ignoble. Notons quand même que le discriminant

est toujours positif quand $p \in [0,1]$ (il est croissant puis décroissant sur l'intervalle et s'annule en 1), on peut continuer les calculs théoriques mais ça n'a vraiment aucun intérêt. Regardons simplement ce qui se passe un peu plus précisément dans un autre cas particulier, celui où $p = \frac{1}{3}$. On a alors $\Delta = \frac{4}{3}$, donc les racines de l'équation caractéristique sont $x_1 = \frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$ et $x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{3}$. On a bien sûr $a_n = Ax_1^n + Bx_2^n$, avec les conditions initiales $a_2 = Ax_1^2 + Bx_2^2 = \frac{1}{9}$ et $a_3 = Ax_1^3 + Bx_2^3 = \frac{2}{27}$. On peut effectuer l'opération $x_1L_1 - L_2$ pour obtenir $B(x_1x_2^2 - x_2^3) = \frac{x_1}{9} - \frac{2}{27}$, donc on déduit péniblement (je vous épargne les détails) que $B = \frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{3}-12}$. Un calcul fort similaire donne alors $A = \frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{3}+12}$. On en déduit donc la passionnante formule $a_n = \frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{3}+12} \times \left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n + \frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{3}-12} \times \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n$.

Le calcul de la somme de toutes ces probabilités revient à $\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{3}+12} \times \left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{3}}{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{3}-12} \times \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{3}}{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{3}+12} \times \frac{4+2\sqrt{3}}{9} \times \frac{3}{2-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{3}-12} \times \frac{4-2\sqrt{3}}{9} \times \frac{3}{2+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{6\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{3}-1}{6\sqrt{3}(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{4-3} + \frac{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})}{4-3}\right) = \frac{11+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-11}{6\sqrt{3}} = 1$. Incroyable, on a bien réussi à prouver qu'on avait toujours une probabilité 1 de finir par obtenir un double Pile.
Le calcul de la moyenne est du même style en nettement pire, vous admettrez comme moi qu'il donne un résultat égal à 12 (oui c'est très simple).

9. Si $p = 0$, on a toutes les probabilités a_n qui sont nulles, ce qui est bien sûr normal puisqu'on ne pourra jamais obtenir un double Pile. Dans ce cas, le calcul de moyenne n'a plus de sens (la somme donne évidemment 0 mais il faudrait ajouer le fait que « $a_\infty = 1$ » pour prendre tous les cas possibles en compte). Si $p = 1$, $a_2 = 1$ et tous les termes suivants sont nuls, et on a bien sûr une moyenne égale à 2 puisqu'on est certains d'obtenir le premier double Pile au deuxième lancer. Puisqu'on n'a pas fait le calcul de la moyenne pour toutes les valeurs de p (c'est vraiment beaucoup trop immonde dans le cas général), on se contentera de constater que la moyenne est logiquement nettement plus élevée quand $p = \frac{1}{3}$ que pour $p = \frac{2}{3}$. On devrait intuitivement avoir une limite pour la moyenne égale à 2 quand p tend vers 1, et infinie quand p tend vers 0, ce qui est de fait le cas. On n'a même pas besoin d'un calcul explicite pour le prouver. Lorsque p tend vers 1, la probabilité a_2 tend vers 1, ce qui suffit à prouver que la somme définissant la moyenne tend elle-même vers 2 (avec un peu de soin). Et si p tend vers 0, on peut toujours trouver une valeur suffisamment faible de p pour que la **somme** des probabilités a_k pour k variant entre 2 et $2n$ (par exemple) soit inférieure à $\frac{1}{2}$, pour un entier n fixé. Il reste alors une probabilité au moins égale à $\frac{1}{2}$ d'avoir une valeur du nombre de lancers supérieure ou égale à $2n$, ce qui suffit à contribuer au calcul de la moyenne pour la rendre supérieure à n (cf l'inégalité de Markov qu'on démontrera dans le prochain chapitre de probas). Si on peut rendre cette moyenne supérieure à n'importe quel entier fixé, elle a donc bien pour limite $+\infty$ quand p tend vers 0.