Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 14 : Polynômes

MPSI B Lycée Camille Jullian

23 février 2023

Exercice 1 (*)

Soient P et Q les deux polynômes définis par $P(X) = 2X^3 + 5X - 1$ et $Q(X) = -X^2 + 3X$. Calculer chacun des polynômes suivants : $P + Q$, PQ, P^2, $P \circ X^2$, $P \circ Q$, $Q \circ P$, $P'Q$, $Q^{(2)} \circ P'$, $3PQ - Q^2 \circ P$.

Exercice 2 (*)

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Déterminer une racine évidente du polynôme P.
2. Factoriser P sous la forme $(X + 2)Q(X)$, où Q est un polynôme de degré 2.
3. En déduire le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre les inéquations $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 > 0$ et $e^{2x} - 2e^x \leqslant 5 - 6e^{-x}$

Exercice 3 (* à ***)

Factoriser chacun des polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$:

1. $P_1 = X^6 + 1$
2. $P_2 = X^6 - 7X^3 - 8$
3. $P_3 = (X^2 - 4X + 1)^2 + (3X - 5)^2$
4. $P_4 = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$ (on trouvera un entier $n \leqslant 5$ racine double de P)
5. $P_5 = X^6 - X^5 + X^4 + X^3 - 14X^2 + 20X - 8$ (aucune astuce ici, il faut simplement y croire)
6. $P_6 = X^8 + X^4 + 1$
7. $P_7 = X^9 + X^6 + X^3 + 1$
8. $P_8 = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$

Exercice 4 (**)

1. Déterminer la forme algébrique des racines carrées des nombres complexes $\dfrac{i + \sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{i - \sqrt{3}}{2}$.
2. Effectuer la division euclidienne de $X^6 - i$ par $X^2 + i$. En déduire, à l'aide de la question précédente, la factorisation de $X^6 - i$.
3. Résoudre l'équation $z^6 = i$ en passant par la forme exponentielle. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5 (**)

Pour chacune des conditions suivantes, déterminer tous les polynômes la vérifiant :

- P est de degré 3, $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$ et $P'(0) = 2$
- $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$
- P est de degré 3, $(X + 1)^2$ divise $P + 1$ et $(X - 1)^2$ divise $P - 1$
- $(X^2 + 4)P'' = 6P$
- $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
- P est de degré $3\pounds$, est divisible par $X - 1$, et admet le même reste lors de ses divisions par $X - 2$, $X - 3$ et $X - 4$

Exercice 6 (**)

Effectuer la division euclidienne de P par Q dans chacun des cas suivants :

1. $P = X^3 + X^2 - 2X + 3$ et $Q = X^2 + 2X - 1$
2. $P = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$, et $Q = X^2 - 3X + 1$
3. $P = X^4 - 2X^2 \cos(2\theta) + 1$ et $Q = X^2 - 2X \cos(\theta) + 1$
4. $P = X^3 - iX^2 - X$, et $Q = X - 1 + i$,
5. $P = (X \sin(\theta) + \cos(\theta))^n$ et $Q = X^2 + 1$ (on donnera uniquement le reste)

Exercice 7 (**)

Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $X^2 + X + 1$ divise $(X^4 + 1)^n - X^n$.

Exercice 8 (*)

Trouver deux constantes a et b telles que $P = X^3 - 2X + 1$ divise $Q = X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2$.

Exercice 9 (***)

Montrer que, si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme quelconque, $P \circ P - X$ est divisible par $P - X$.

Exercice 10 (***)

Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquelles le polynôme $P = X^4 - 4X^3 + \lambda X^2 - 12X + 3$ admet deux racines dont le produit est égal à 1 (ainsi que deux autres sur lesquelles on ne suppose rien du tout !), et factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ si cette condition est vérifiée.

Exercice 11 (**)

1. Déterminer les valeurs réelles de a et b pour lesquels le polynôme $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + 12X + 9$ est le carré d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$.
2. Dans ce cas, factoriser P et $P - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 12 (***)

On définit la suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
4. En déduire une expression simple de $P_n(2\cos(\theta))$.
5. Déterminer les racines de P, et sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 13 (**)

On note a, b et c les trois racines complexes (éventuellement confondues) du polynôme $P = X^3 + X + 1$. Calculer la valeur des expression suivantes : $A = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$, $B = \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} + \dfrac{ab}{c}$, $C = \dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{a+c} + \dfrac{c^2}{a+b}$ (on ne cherchera surtout pas à calculer explicitement a, b et c).

Exercice 14 (**)

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que le polynôme $P = X^3 + X^2 + \alpha X + 6$ admet deux racines a et b vérifiant $a + b = ab$. Déterminer alors toutes les racines du polynôme.

Exercice 15 (**)

On note $P = X^3 + 3X - 2i$, et x, y et z les trois racines complexes de ce polynôme (qu'on ne cherchera pas à calculer). Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = x^n + y^n + z^n$.

1. Donner les valeurs de S_0, S_1 et S_2.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer S_{n+3} en fonction de S_{n+1} et de S_n.
3. En déduire la valeur de S_7.

Exercice 16 (***)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 1 \\ x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & -5 \end{array}\right.$$

Pour cela, on cherchera un polynôme unitaire de degré 3 ayant pour racines x, y, et z, et on calculera chacun de ses coefficients en utilisant les conditions données.

Résoudre par le même type de méthode le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & + & \frac{1}{z} & = & 1 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 9 \end{array}\right.$$

Exercice 17 (**)

On pose $P = X^3 - 11X + 12$.

1. Montrer que P admet trois racines réelles, appartenant aux intervalles $]-4,-3[$, $]1,2[$ et $]2,3[$.
2. En notant a, b et c ces trois racines, calculer $\arctan(a) + \arctan(b) + \arctan(c)$ (on ne cherchera bien sûr pas de valeur exacte de a, b et c).

Exercice 18 (***)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $n+1$ polynômes de degré n en posant $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$.

1. Que valent les polynômes $B_{3,k}$ pour les différentes valeurs de k pour lesquelles ils sont définis ?
2. Étudier rapidement les polynômes $B_{3,k}$ sur l'intervalle $[0,1]$, et tracer une allure de leurs courbes représentatives sur ce même intervalle.
3. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=3} B_{3,k}$? Généraliser ce résultat, et en déduire que $\forall x \in [0,1]$, $B_{n,k}(x) \in [0,1]$ (quelles que soient les valeurs de n et de k).
4. Exprimer le polynôme dérivé $B'_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1,k-1}$ et de $B_{n-1,k}$.
5. On pose $f(x) = x$, et on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$. Montrer que, $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.
6. Effectuer la même démonstration qu'à la question précédente en prenant cette fois-ci $f(x) = x^2$.

Exercice 19 (***)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

1. Montrer que P a nécessairement un degré pair, et un coefficient dominant positif.
2. Montrer que si $d^\circ(P) = 2$, on peut trouver deux polynômes Q et R à coefficients réels tels que $P = Q^2 + R^2$.
3. Vérifier que, si Q, R, S et T sont quatre polynômes quelconques, alors $(Q^2+R^2)(S^2+T^2) = (QS+RT)^2 + (QS-RT)^2$.
4. Montrer que la propriété démontrée à la question 2 est vraie quel que soit le degré de P.

Problème (***)

Ce problème présente une méthode pour calculer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, qui fait intervenir des polynômes (et un petit peu de trigonométrie). Si vous êtes sages, nous verrons d'autres méthodes pour calculer cette même « somme infinie » (on parlera de séries d'ici la fin de l'année) dans certains chapitres ultérieurs.

1. On définit la fonction cotangente (en abrégé cotan) par la formule $\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Donner le domaine de définition, la périodicité, les variations sur une période, et une allure de courbe représentative de cette fonction. On montrera en particulier que cotan est bijective de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$.
2. On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, le polynôme $Q_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.
   (a) Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.
   (b) Déterminer les racines du polynôme Q_n (on doit trouver $n-1$ nombres imaginaires purs).
   (c) Vérifier que ces racines sont simples, et en déduire la factorisation de Q_n dans $\mathbb{C}[X]$.
3. On définit, toujours pour $n \geqslant 1$, un nouveau polynôme $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k$.
   (a) Donner les expressions explicites des polynômes P_1, P_2 et P_3.
   (b) Montrer que $2P_n(X^2) = Q_{2n+1}(X)$.
   (c) En déduire les racines de P_n, et vérifier qu'elles sont simples.
   (d) Que vaut la somme des racines de P_n ?
   En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \left(\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = \frac{n(2n-1)}{3}$.
4. (a) Montrer que, $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.
   (b) En déduire que, sur le même intervalle, $\text{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \text{cotan}^2(x)$.
   (c) Appliquer l'encadrement précédent à $x = \frac{k\pi}{2n+1}$, en déduire un encadrement de $\frac{1}{k^2}$, puis la valeur de la limite recherchée dans cet exercice.
5. En complément, on peut obtenir presque sans effort supplémentaire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$:
   (a) Montrer par récurrence que, si $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, alors $\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} z_i z_j$.
   (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \left(\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^4$ (on pensera aux relations coefficients-racines dans le polynôme P_n).
   (c) Conclure.