Feuille d'exercices n° 20 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

26 avril 2023

Exercice 1 (*)

Dans chacun des cas, il suffit de calculer les images des vecteurs de la base canonique et d'écrire leurs coordonnées en colonne dans la matrice A.

1. Calculs immédiats : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On calcule $f(1) = 2X+1$, $f(X) = (2X+1)X - X^2 = X^2+X$, et $f(X^2) = (2X+1)X^2 - 2X^3 = X^2$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $f(1) = \displaystyle\int_X^{X+2} 1\ dt = X+2-X = 2$, $f(X) = \displaystyle\int_X^{X+2} t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_X^{X+2} = \frac{1}{2}(X^2+4X+4-X^2) = 2X+2$, et $f(X^2) = \displaystyle\int_X^{X+2} t^2\ dt = \frac{1}{3}[t^3]_X^{X+2} = \frac{1}{3}(X^3+6X^2+12X+8-X^3) = 2X^2+4X+\frac{8}{3}$. Autrement dit, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Finalement, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (*)

Pour prouver que s est une symétrie, il suffit de vérifier que $M^2 = I$ (ce qui prouvera que $s \circ s = id$), ce qui est effectivement le cas (difficile de détailler plus le calcul ici). Pour déterminer l'espace par rapport auquel on symétrise, il faut déterminer $\ker(f - id)$, ce qui revient à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$. Pas trop difficile à résoudre, on garde l'unique équation $x+2y+z = 0$, soit $z = -x-2y$. Autrement dit, on symétrise par rapport à l'espace $\text{Vect}((1,0,-1),(0,1,-2))$. Quand à l'espace parallèlement auquel on symétrise, on cherche cette fois-ci le noyau de $f + id$, donc on résout le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & & & = & 0 \\ -x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$. La condition $y = 0$ ramène les deux autres équations à $x = z$, donc l'espace recherché est $\text{Vect}((1,0,1))$.

Exercice 3 (**)

Ce n'est pas si méchant que ça : la division de 1 par $X^2 - X + 1$ s'écrit simplement $1 = 0 \times (X^2 - X + 1) + 1$, le reste vaut donc 1, soit $f(1) = 1$. De même, $f(X) = X$. Il faut réfléchir un tout petit peu plus ensuite : $X^2 = 1 \times (X^2 - X + 1) + X - 1$, donc $f(X^2) = X - 1$, et enfin, avec un poil d'astuce, $X^3 = X \times (X^2 - X + 1) + X^2 - X = (X+1) \times (X^2 - X + 1) - X + X - 1$, donc $f(X^3) = -1$. On peut aussi, bien entendu, effectuer vraiment la division euclidienne. La matrice dans la base canonique de f est donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul inimaginablement palpitant permet de constater que $A^2 = A$ (mais si !), l'application f est donc un projecteur (ce qui n'a rien de surprenant, le reste de notre division étant de degré au maximum 1, si on refait une division par $X^2 - X + 1$, il ne se passera plus rien). Si on souhaite déterminer le noyau en résolvant le système, en notant $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, on a simplement les deux équations $a - c - d = b + c = 0$ (les deux autres lignes étant nulles), soit $c = -b$, et $d = a + b$. Autrement dit, $\ker(f) = \text{Vect}(1 + X^3, X - X^2 + X^3)$. En fait, on sait très bien que ce noyau est constitué des multiples de $X^2 - X + 1$, on peut vérifier que cela correspond bien à ce qu'on vient d'obtenir. Pour l'image, en prenant les vecteurs-colonnes de la matrice représentative, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1, X, X - 1, -1) = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 4 (**)

On peut bien sûr essayer d'exprimer les trois vecteurs de la base $\mathcal{C}$ en fonction de ceux de la base $\mathcal{B}$ (trois systèmes de trois équations à trois inconnues à résoudre), mais on peut aller un tout petit peu plus vite en exploitant intelligemment les matrices de passage : en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, et $Q = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ celle de la base canonique vers $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1}Q$ (en effet, en notant X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur u dans la base canonique, et X_1, X_2 ses coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on sait que $X = PX_1$ et $X = QX_2$, dont on déduit $X_1 = P^{-1}X = P^{-1}QX_2$, et donc $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1}Q$). Commençons donc par calculer l'inverse de P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -8 & 3 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ -5 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $P^{-1}Q = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -59 & 10 \\ 9 & 17 & 0 \\ 4 & 10 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (**)

1. La linéarité de l'application est évidente, et nous allons tout simplement démontrer que c'est un endomorphisme en calculant les images des vecteurs de la base canonique (ce qui est nécessaire pour déterminer la matrice) et en constatant qu'elles sont dans $\mathbb{R}_2[X]$. En effet, $\varphi(1) = 1 - 2X$, $\varphi(X) = X^2 + X + 1 - 2X^2 + X = -X^2 + 2X + 1$, et $\varphi(X^2) = 2X^3 + 2X^2 + 2X - 2X^3 + X^2 = 3X^2 + 2X$. La matrice de l'application est donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. On peut par exemple prouver que f est injective (ce sera suffisant puisqu'il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie) en déterminant son noyau. D'après les calculs de la question précédente, $f(aX^2 + bX + c) = 3aX^2 + 2aX - bX^2 + 2bX + b + c - 2cX$. Cette image s'annule si $3a - b = 2a + 2b - 2c = b + c = 0$. On en déduit les conditions $a = \frac{1}{3}b$ et $c = -b$, en remplaçant dans la deuxième équation on obtient alors $\frac{2}{3}b + 2b + 2b + 0$, donc $b = a = c = 0$. Le noyau est donc réduit au polynôme nul, et f est injective, donc bijective. Pour déterminer un antécédent de $X^2 - 1$, qui a pour coordonnées $(-1, 0, 1)$ dans la base canonique, on exploite A et on résout le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & & & = & -1 \\ -2a & + & 2b & + & 2c & = & 0 \\ & - & b & + & 3c & = & 1 \end{array} \right.$. La deuxième équation donne $a = b + c$, la première $a = -1 - b = -3c$ et la dernière $b = 3c - 1$. En remplaçant, on a donc $-3c = 4c - 1$, soit $c = \frac{1}{7}$, puis $a = -\frac{3}{7}$ et $b = -\frac{4}{7}$. Bon, c'est moche, mais $P = \frac{1}{7}(X^2 - 4X - 3)$ est un antécédent (et même le seul) de $X^2 - 1$ par φ.

3. D'après la question précédente, on connait déjà une solution de l'équation ! Il ne reste plus qu'à déterminer la solution générale de l'équation homogène associée $y' - \dfrac{2x-1}{x^2+x+1}y = 0$. Pour cela, il faut réussir à calculer (par exemple) $\displaystyle\int^x \frac{2t-1}{t^2+t+1}\,dt = \int^x \frac{2t+1}{t^2+t+1} - \frac{2}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt = \ln(x^2+x+1) - \frac{8}{3}\int_0 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2+1}\,dt = \ln(x^2+x+1) - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$.
Il ne reste plus qu'à ajouter à cette superbe fonction la solution particulière obtenue plus haut pour trouver toutes les solutions de l'équation différentielles, qui sont donc les fonctions $y : x \mapsto K\ln(x^2+x+1) + \dfrac{4K}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right) + \dfrac{1}{7}(x^2-4x-3)$, avec $K \in \mathbb{R}$. On est bien contents de le savoir.

Exercice 6 (***)

1. Il suffit de constater que $u \circ (u + id) = -\,id$ pour comprendre que u est bijectif, de réciproque $u^{-1} = -u - id$.
2. Il suffit de prouver que $u(x)$ ne peut pas être proportionnel à x. Supposons donc $u(x) = \lambda x$ (avec $\lambda \neq 0$ puisque le noyau de u est réduit au vecteur nul). Alors $u^2(x) = \lambda^2 x$, donc $\lambda^2 x + \lambda x + x = 0$ en reprenant l'hypothèse faite sur u. On doit donc avoir $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, ce qui est difficile dans la mesure où cette équation a un discriminant négatif, et donc pas de racine réelle.
3. Prenons donc un x quelconque (non nul quand même) de $\mathbb{R}^4$, $(x, u(x))$ forme une famille libre d'après la question précédente. Choisissons désormais un $y \neq 0$ tel que $u(y) \notin \mathrm{Vect}(x, u(x))$. C'est certainement possible puisque l'image de u est $\mathbb{R}^4$ tout entier (l'application est bijective). Un tel y ne peut lui-même pas appartenir à $\mathrm{Vect}(x, u(x))$, puisque toute combinaison linéaire de x et de $u(x)$ a une image par u qui est elle-même dans $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ (rappelons que $u(u(x)) = -u(x) - x$). La famille $(x, u(x), y, u(y))$ est donc nécessairement une famille libre de $\mathbb{R}^4$, et par conséquent en forme une base. La matrice de u dans cette base est exactement celle demandée, puisque $u(u(x)) = -u(x) - x$ et $u(u(y)) = -u(y) - y$, toujours à cause de l'équation vérifiée par u.

Exercice 7 (**)

Chercher une telle base revient à chercher trois vecteurs (u, v, w) tels que $f(u) = 0$, $f(v) = -v$ et $f(w) = v - w$ (accessoirement, il serait bon que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$. Puisque $f(x, y, z) = (-x + z, -x - 2y + z, -x - y + z)$, on va pouvoir résoudre trois jolis systèmes. Le premier système (celui pour lequel $f(u) = 0$) se ramène tellement trivialement à l'unique équation $x = z$ que je ne l'écris même pas. Nous prendrons donc $u = (1, 0, 1)$. Pour le deuxième vecteur, $f(v) = -v$ se traduit par $\begin{cases} -x \quad\quad + z = -x \\ -x - 2y + z = -y \\ -x - y + z = -z \end{cases}$. Bon, une fois constaté que $z = 0$, il reste la seule condition $y = -x$, on peut donc prendre $v = (1, -1, 0)$. Reste désormais à trouver un vecteur w tel que $f(w) = v - w$, ce qui se traduit par $\begin{cases} -x \quad\quad + z = 1 - x \\ -x - 2y + z = -1 - y \\ -x - y + z = -z \end{cases}$. Cette fois, la première équation donne $z = 1$, donc $-x - y = -2$ (les deux dernières équations sont encore identiques). Pour ne pas s'embêter, $w = (1, 1, 1)$ fera l'affaire. Il est très facile de constater que (u, v, w) est bien une base de $\mathbb{R}^3$. De toute façon, on va devoir inverser la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de la base canonique vers (u, v, w) pour la suite des calculs, ce qui prouvera que la famille est une base.

Utilisons la méthode de la résolution de système pour cela : $\begin{cases} x + y + z = a \\ \quad - y + z = b \\ x \quad + z = c \end{cases}$. La différence des deux équations extrêmes donne $y = a - c$. La deuxième équation donne alors $z = b + y = a + b - c$, puis $x = c - z = 2c - a - b$. On en déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Reste à calculer des puissances : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons par exemple C et N ces deux matrices, la matrice N est clairement nilpotente et on vérifie aisément que $N^2 = 0$. On peut appliquer la formule du binôme de Newton (les deux matrices commutent : $CN = NC = -N$), on trouve alors $B^n = (C+N)^n = C^n + nC^{n-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$. Comme on sait que $P^{-1}AP = B$, la récurrence classique permet de constater que $A^n = PB^nP^{-1}$: c'est vrai au rang 1 puisque $PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$, et si on le suppose au rang n, alors $A^{n+1} = AA^n = PBP^{-1}PB^nP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}$. Pour achever ce brillant exercice, il ne reste plus qu'à calculer A^n : $PB^n = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n & (1-n)(-1)^n \\ 0 & (-1)^{n+1} & (n+1)(-1)^n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PB^nP^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 2-n & 1-n & n-2 \\ n & n+1 & -n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 (**)

1. Il suffit de calculer le produit des deux matrices $M - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et constater qu'il est en effet nul. D'ailleurs, on peut se contenter de calculer la première ligne, les deuxième et troisième ligne de $M - I$ étant des multiples de la première, on obtiendra également des zéros sur celles-ci.
2. Les deux sous-espaces en question ont une intersection clairement réduite au vecteur nul, on peut difficilement vérifier à la fois $f(u) = u$ et $f(u) = -3u$ sans être nul. Comme on n'a pas encore d'information sur les dimensions, prouver directement que la somme des deux espaces est égale à $\mathbb{R}^3$ demande une certaine dose d'astuce. En gros, il faut écrire $u = v + w$, avec $f(v) = v$ et $f(w) = -3w$ (pour que v et w appartiennent aux deux noyaux). On sait, d'après la question précédente, que $M^2 + 2M - 3I = 0$, donc $f^2(u) + 2f(u) - 3u = 0$. On peut alors trouver relativement facilement v et w en les cherchant comme combinaisons linéaires de u et de $f(u)$. Ainsi, $f(u - f(u)) = f(u) - f^2(u) = f(u) + 2f(u) - 3u = -3(u - f(u))$, donc tous les multiples de $u - f(u)$ appartiennent à $\ker(f + 3\,id)$. De même, $f\left(u + \frac{1}{3}f(u)\right) = f(u) + \frac{1}{3}f^2(u) = f(u) - \frac{2}{3}f(u) + u = u + \frac{1}{3}f(u)$, donc tous les multiples de $u + \frac{1}{3}f(u)$ appartiennent à $\ker(f - id)$. Il ne reste plus qu'à reconstituer u à partir de ces deux morceaux : en posant $v = \frac{3}{4}u + \frac{1}{4}f(u)$ (qui appartient à $\ker(f - id)$) et $w = \frac{1}{4}u - \frac{1}{4}f(u)$ (qui appartient à l'autre noyau), on obtient bien $u = v + w$, ce qui prouve la supplémentarité des deux noyaux.
3. On va procéder par résolution de systèmes. On a déjà calculé plus haut la matrice représentative de $f - id$, son noyau est donc constitué des solutions du système $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$.

Les trois équations sont équivalentes, on garde la simple équation $x = 2y+z$, soit $\ker(f-id) = \text{Vect}((2,1,0),(1,0,1))$. De même pour l'autre noyau, on résout $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & & & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & c \end{array}\right.$.
La deuxième équation donne $x = z$, et on a donc $4x - 2y = 0$ (les deux équations extrêmes sont identiques), soit $y = 2x$, donc $\ker(f + 3\,id) = \text{Vect}((1,2,1))$. On note en particulier que $\dim(\ker(f - id)) = 2$ et $\dim(\ker(f + 3\,id)) = 1$.

4. Il suffit de prendre la famille $((2,1,0),(1,0,1),(1,2,1))$ (qui est nécessairement une base puisque les deux noyaux sont supplémentaires). Chacun des trois vecteurs ayant une image proportionnelle à lui-même par f, la matrice de f dans cette base sera bien diagonale, plus précisément égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (***)

1. Considérons un vecteur $u \in E$ tel que $f^2(u) \neq 0$ (il en existe forcément d'après l'hypothèse faite sur l'application f). Notons $v = f(u)$ et $w = f^2(u)$. Bien sûr, $v \neq 0$ (sinon on aurait aussi $w = 0$), mais on peut également affirmer que v n'est pas proportionnel à u : si on avait $f(u) = \lambda u$, alors on en déduirait $f^2(u) = f(\lambda u) = \lambda^2 u$, puis $f^3(u) = \lambda^3 u$. Mais alors on aurait $\lambda = 0$ puisque $f^3 = 0$, ce qui est absurde puisque $v \neq 0$. La famille (u, v) est donc une famille libre. Vérifions maintenant que (u, v, w) reste encore libre. Si on suppose que w est combinaison linéaire de u et de v, on peut écrire $f^2(u) = \lambda f(u) + \mu u$, donc en composant par f, $\lambda f^2(u) + \mu f(u) = 0$, et en composant encore une fois $\mu f^2(u) = 0$, ce qui ne peut arriver que si $\mu = 0$. Mais alors $\lambda = 0$ en remontant nos équations, donc $f^2(u) = 0$, ce qui est contraire à nos hypothèses. Finalement, (u, v, w) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}$, donc une base qu'on va subtilement noter $\mathcal{B}$. La matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ est exactement celle demandée dans l'énoncé (par construction, $f(u) = v$, $f(v) = w$ et $f(w) = f^3(u) = 0$).
2. Soit g un endomorphisme commutant avec f, et N sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. En notant M la matrice obtenue à la question précédente, on doit donc avoir $MN = NM$. Posons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on calcule alors facilement $MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, et $NM = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}$.
La condition $MN = NM$ se traduit donc par les égalités $b = c = f = 0$, $a = e$, $b = f$, $d = h$ et $e = i$. Autrement dit, les matrices commutant avec M sont de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix}$.
L'ensemble correspondant est bien un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}$, qu'on peut même décrire comme $\text{Vect}(I_3, M, M^2)$. L'isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ envoie ce sev sur celui des endomorphismes commutant avec f, qui est donc également de dimension 3, et peut être décrit comme $\text{Vect}(id_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$.

Exercice 10 (**)

1. Puisqu'il s'agit d'une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, montrer la liberté de la famille suffit. Supposons donc que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$, cela se traduit par le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & 2c & = & 0 \\ -a & & & - & c & = & 0 \\ -3a & + & 3b & + & c & = & 0 \end{array}\right.$. La deuxième équation donne immédiatement $c = -a$, ce qui donne en reportant dans les deux autres équations $b - a = 3b - 4a = 0$. Ces deux équations ne sont pas proportionnelles et impliquent donc $a = b = 0$, puis $c = 0$. La

famille est donc bien libre, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

2. Par définition, $s(e_1) = e_1$, $s(e_2) = -e_2$ et $s(e_3) = -e_3$, donc la matrice demandée est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Il n'y a rien à calculer : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. En notant $M = \text{Mat}_{can}(s)$, on sait que $P^{-1}MP = D$, donc $M = PDP^{-1}$. Calculons donc P^{-1} en résolvant le système $\begin{cases} x + y + 2z = a \\ -x - z = b \\ -3x + 3y + z = c \end{cases}$. La deuxième équation donne $z = -b - x$ qu'on peut reporter dans les deux autres : $-x + y = a + 2b$ et $-4x + 3y = b + c$. En multipliant par quatre la première de ces deux équations et en soustrayant la seconde, on a $y = 4a + 7b - c$, puis $x = y - a - 2b = 3a + 5b - c$ et enfin $z = -b - x = -3a - 6b + c$, donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à calculer $PD = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, puis $M = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -2 \\ -6 & -11 & 2 \\ -18 & -30 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (***)

1. On pose bien entendu $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ (quoique les plus tordus puissent changer l'ordre). Il suffit alors de prendre $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ pour que l'égalité demandée soit vérifiée.

2. Il s'agit, pour changer, de résoudre des systèmes. Pour ne pas trainer de $\dfrac{1}{2}$ partout, on va tout multiplier par 2, l'équation $AX = X$ se traduit alors par le système $\begin{cases} -x - 3y + 6z = 2x \\ 3x + 5y - 6z = 2y \\ 3x + 3y - 4z = 2z \end{cases}$. Les trois équations sont en fait rigoureusement identiques, il ne restent que la condition $x+y = 2z$, soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}$. De même, pour l'équation $AX = -2X$, on résout $\begin{cases} 3x - 3y + 6z = 0 \\ 3x + 9y - 6z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$. La dernière équation donne $y = -x$, et la première se résume alors (en divisant par 6) à $x + z = 0$, soit $z = -x$. La deuxième équation est alors toujours vérifiée, ce dont on déduit que $X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}$.

3. C'est évident vu les formules obtenues, en écrivant en ligne pour simplifier, $S_1 = \text{Vect}((2, 0, 1), (0, 2, 1))$, et $S_{-2} = \text{Vect}((1, -1, -1))$.

4. Au vu des calculs précédents, il suffit de prendre pour P la matrice de passage $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. La récurrence habituelle nous permet de prouver que $A^n = PD^nP^{-1}$ (en notant D la matrice

diagonale de l'énoncé) : c'est vrai au rang 1 car $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$, et en le supposant vrai au rang n, alors $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Il reste à calculer P^{-1}, par exemple par la méthode du système : $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & & & + & z & = & a \\ & & 2y & - & z & = & b \\ x & + & y & - & z & = & c \end{array}\right.$. Procédonc par substitution : $x = \dfrac{a-z}{2}$ et $y = \dfrac{b+z}{2}$, donc $\dfrac{a}{2} - \dfrac{z}{2} + \dfrac{b}{2} + \dfrac{z}{2} - z = c$, soit $z = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} - c$, puis $x = \dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{2}$ et $y = \dfrac{a}{2} + \dfrac{3b}{4} - \dfrac{c}{2}$, soit $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Allez, un petit produit matriciel pour continuer : $PD^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & (-2)^n \\ 0 & 2 & -(-2)^n \\ 1 & 1 & -(-2)^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-(-2)^{n+1} & -2-(-2)^{n+1} & 4-(-2)^{n+2} \\ 2+(-2)^{n+1} & 6+(-2)^{n+1} & -4+(-2)^{n+2} \\ 2+(-2)^{n+1} & 2+(-2)^{n+1} & (-2)^{n+2} \end{pmatrix}$. Puisque $X_n = A^nX_0$, on en déduit (en simplifiant tout par 2), que $x_n = \dfrac{(1+(-2)^n)x_0 + (-1+(-2)^n)y_0 + (2+(-2)^{n+1})z_0}{2}$,
$y_n = \dfrac{(1-(-2)^n)x_0 + (3-(-2)^n)y_0 + (-2-(-2)^{n+1})z_0}{2}$,
et $z_n = \dfrac{(1-(-2)^n)x_0 + (1-(-2)^n)y_0 - (-2)^{n+1}z_0}{2}$.

Exercice 12 (*)

1. Soit $P = aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$, on cherche à écrire $P = x(X^2+1)+y(X+1)+z(2X^2-X)$, ce qui revient au système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & c \\ & & y & - & z & = & b \\ x & & & + & 2z & = & a \end{array}\right.$. En effectuant l'opération $L_3 + L_2 - L_1$, on trouve $z = a + b - c$, puis on en déduit aisément que $y = z + b = a + 2b - c$ puis $x = c-y = -a-2b+2c$. Puisque le système a toujours une solution, la famille est génératrice. Puisque la solution est unique (en particulier lorsque $a = b = c = 0$), la famille est libre. il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, la matrice de passage dans l'autre sens est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (attention quand même, les coefficients notés a, b et c dans la première question ne sont pas dans l'ordre de la base canonique).
3. Il suffit de calculer $P^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour en déduire que $P = 5(X^2+1) - 3(X+1) - 2(2X^2 - X)$.
4. Pour la base canonique, on calcule $\varphi(1) = 0$; $\varphi(X) = X$ et $\varphi(X^2) = 2X^2$ pour en déduire la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice sera donc $M' = P^{-1}MP = P^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 13 (**)

1. On calcule et on constate que $A^2 = A$. L'application f vérifie donc $f^2 = f$, c'est un projecteur.
2. Pour le noyau, on résout le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & - & 4z & = & 0 \\ x & & & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$. En prenant la deuxième équation, $x = 2z$, puis en reportant dans la troisième $2z - y - z = 0$, donc $y = z$. Reste à reprendre la première équation : $6z - 2z - 4z = 0$, qui est toujours vérifiée. Conclusion : $\ker(f) = \{(2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2, 1, 1))$. Pour l'image, le plus simple est de chercher les vecteurs invariants par f, et donc de résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & - & 4z & = & x \\ x & & & - & 2z & = & y \\ x & - & y & - & z & = & z \end{array}\right.$. Les équations se ramènent toutes à $x - y - 2z = 0$, donc $\mathrm{Im}(f) = \{(y + 2z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (2, 0, 1))$.
3. La famille $((2, 1, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (en effet, si $a(2, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(2, 0, 1) = 0$, en composant par f, on obtient $b(1, 1, 0) + c(2, 0, 1) = 0$, ce qui implique très rapidement $b = c = 0$, puis $a = 0$, la matrice de passage de la base canonique à notre famillee est inversible, la famille est donc une base). Dans cette base, le premier vecteur a une image nulle par f, les deux autres ont pour image eux-même, la matrice de f est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 (*)

1. les matrices A_1 et B_1 n'ont pas la même trace, elles ne peuvent pas être semblables.
2. les matrices A_2 et B_2 sont bien semblables. Si on note $f(x, y, z) = (y, 0, 0)$, A_2 est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et B_2 est la matrice de cette même application f dans la base $((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$ (vérifications triviales).
3. les matrices A_3 et B_3 ne sont pas semblables pour une raison un peu subtile : $A_3^2 = 0$, mais $B_3^2 \neq 0$ (en fait $B_3^2 = A_3$). Or, si on avait une relation du type $B_3 = P^{-1}A_3P$, on aurait également $B_3^2 = P^{-1}A_3^2P$, ce qui impliquerait $B_3^2 = 0$.
4. les matrices A_4 et B_4 sont bien semblables. Si on note $f(x, y, z) = (y, z, 0)$, A_4 est la matrice de f dans la base canonique, et B_4 est la matrice de la même application f dans la base $((1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1))$ (encore une fois les vérifications sont triviales).

Exercice 15 (***)

1. Il s'agit de résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (3-\lambda)x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \\ -2x & + & (6-\lambda)y & + & 6z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & (2+\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$. Additions donc les deux dernières équations pour obtenir $(4-\lambda)y + (4-\lambda)z = 0$. Si $\lambda = 4$, cette équation disparait et il ne reste plus que les deux autres conditions $-x - 2y - 3z = -2x + 2y + 6z = 0$. On peut les additionner pour trouver $-3x + 3z = 0$, donc $z = x$, puis $y = x - 3z = -2x$, dont on déduit que $\ker(f - 4\,id) = \mathrm{Vect}((1, -2, 1))$. Supposons désormais que $\lambda \neq 4$, on a alors $y + z = 0$, donc $z = -y$, qu'on peut reporter dans nos deux premières équations : $(3 - \lambda)x + y = 0$ et $-2x - \lambda y = 0$. Effectuons alors l'opération $L_2 + \lambda L_1$ pour trouver $(-2 + 3\lambda - \lambda^2)x = 0$. L'équation $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ admet pour racines évidentes $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$. Si λ est différent de 1, 2 ou 4, on obtiendra $x = 0$, puis $y = z = 0$ et le noyau sera donc nul. Dans le cas où $\lambda = 1$, on conserve une des deux équations faisant intervenir x et y (équations qui sont équivalentes) : $2x + y = 0$, donc $y = -2x$. Avec la condition précédente

$z = -y$, on peut donc conclure $\ker(f - id) = \text{Vect}((1, -2, 2))$. On procède de même lorsque $\lambda = 2$: l'équation restante est $x + y = 0$, donc $y = -x$, puis $\ker(f - 2\,id) = \text{Vect}((1, -1, 1))$.

2. Ce sont exactement les valeurs pour lesquelles le noyau n'est pas nul, donc 1, 2 et 4.
3. Le calcul a déjà été effectué dans la première question.
4. Il suffit de prendre la base $((1, -2, 2), (1, -1, 1), (1, -2, 1))$, dans laquelle la matrice de f sera, d'après les calculs précédents, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Bien sûr, il faudrait tout de même vérifier que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. En fait, ce sera toujours le cas dans ce genre de situation. Notons donc u, v et w les trois vecteurs, qui vérifient $f(u) = u$, $f(v) = 2v$ et $f(w) = 4w$. Supposons maintenant que $au + bv + cw = 0$, alors $(f - id)(au + bv + cw) = 0$, soit $bv + 3cw = 0$. Appliquons maintenant $f - 2\,id$ à $bv + 3cw$ pour obtenir $6cw = 0$. On en déduit que $c = 0$ puis $b = 0$ et $a = 0$ en remontant, la famille est donc libre et constitue une base de $\mathbb{R}^3$. Les plus motivés d'entre vous prouveront plus généralement en utilisant cette technique qu'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_k)$ de $\mathbb{R}^n$ qui sont vecteurs propres d'une même application linéaire f pour des valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ deux à deux distinctes forment nécessairement une famille libre. Sinon, vous attendrez la démonstration de votre professeur de mathématiques préféré l'an prochain.

Exercice 16 (**)

1. Il suffit d'écrire les coefficients dans le bon ordre : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. En observant les coefficients hors de la diagonale, on constate qu'ils ont été multipliés par 3 par rapport à ceux de la matrice A. Comme $3A$ a pour coefficients diagonaux 6, 0 et 6, on en déduit facilement que $A^2 = 3A - 2I$. L'application f vérifie donc $f^2 = 3f - 2\,id$, soit $f \circ \left(\frac{1}{2}f - \frac{3}{2}\,id\right) = -\,id$. On en déduit que f est bijective et que sa réciproque f^{-1} vérifie $f^{-1} = \frac{3}{2}\,id - \frac{1}{2}f$.
3. On doit donc résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (2-\lambda)x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & \lambda y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & (2-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$. L'opération $L_3 - L_2$ donne $(\lambda - 1)y + (1 - \lambda)z = 0$. On a donc un premier cas particulier à traiter : si $\lambda = 1$, le système se réduit aux deux premières équations $x - y + z = 0$ et $x - y + z = 0$. Ah, en fait, il n'y a qu'une seule équation, et on en déduit directement que $\ker(f - id) = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$. Revenons au cas général $\lambda \neq 1$, la dernière équation peut alors se simplifier en $z = y$, et on remplace dans les deux équations restantes : $(2 - \lambda)x = 0$ et $x + (1 - \lambda)y = 0$. Si $\lambda \neq 2$, on obtient très rapidement $x = 0$, puis $y = 0$ puisqu'on a déjà supposé $\lambda \neq 1$. Le seul autre cas à considérer est donc $\lambda = 2$, pour lequel il nous reste comme dernière équation (en plus de la condition $z = y$) $x - y = 0$, donc $x = y$. La conclusion est encore une fois très rapide : $\ker(f - 2\,id) = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Bien entendu, si $\lambda \notin \{1, 2\}$, on a simplement $\ker(f - \lambda\,id) = \{0\}$. En particulier, les seules valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda\,id$ n'est pas injective (et donc pas un automorphisme) sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.
4. Comment dire ? On vient de le faire. Précisons quand même que $\dim(\ker(f - id)) = 2$ et $\dim(\ker(f - 2\,id)) = 1$.

5. La somme de leurs dimensions étant égale à 3, donc la dimension de E, il suffit de vérifier que leur intersection est nulle. Pour cela, on constate simplement qu'un vecteur u vérifiant à la fois $f(u) = u$ et $f(u) = 2u$ est solution de l'équation $2u = u$, donc est bien le vecteur nul.

6. (a) C'est une sorte de système complètement trivial à résoudre. En soustrayant les deux conditions demandées, on doit avoir $p = f - id$, et on en déduit directement que $q = id - p = 2\,id - f$.

   (b) Pas besoin d'exprimer explicitement ces applications, on va faire un calcul formel exploitant la relation $f^2 = 3f - 2\,id$ démontrée plus haut. Calculons donc $p^2 = (f - id)^2 = f^2 - 2f + id = 3f - 2\,id - 2f + id = f - id = p$, ce qui prouve que p est bien un projecteur. De même, $q^2 = (2\,id - f)^2 = 4\,id - 4f + f^2 = 4\,id - 4f + 3f - 2\,id = 2\,id - f$, et q est aussi un projecteur. Enfin, on calcule $p \circ q = (f - id) \circ (2\,id - f) = 2f - f^2 - 2\,id + f = 3f - 2\,id - f^2 = 0$. Le calcul de $q \circ p$ est exactement le même et donne évidemment le même résultat.

7. On va effectuer une petite récurrence : pour $n = 0$, $2^0 p + q = p + q = id = f^0$, donc la relation est vérifiée. Si on la suppose vérifiée au rang n, alors $f^{n+1} = f^n \circ f = (2^n p + q) \circ (2p + q) = 2^{n+1}p^2 + 2^n p \circ q + 2q \circ p + q^2 = 2^{n+1}p^2 + q^2$ d'après les relations démontrées à la question précédente, donc la propriété est bien héréditaire, et vraie pour tout entier naturel. Pour $n = 1$, on devrait donc avoir $f^{-1} = \frac{1}{2}p + q = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\,id + 2\,id - f = \frac{3}{2}\,id - \frac{1}{2}f$. C'est bien le cas !

Problème 1 (**)

A. Calcul matriciel.

1. Un calcul trivial donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, soit effectivement $A^3 = 2A$.

2. Puisque A est la matrice représentative de f dans la base canonique, on a $f(x, y, z) = (y, x + z, y)$. On en déduit que $u(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow y = z + x = 0$, soit $y = 0$ et $z = -x$. Autrement dit, $\ker(f) = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -1))$. L'unique vecteur $(1, 0, -1)$ constitue bien entendu une base de ce noyau puisqu'il est non nul.

   Effectuons un calcul similaire pour le second noyau, en résolvant le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & & & = & \sqrt{2}x \\ x & + & & & z & = & \sqrt{2}y \\ & & y & & & = & \sqrt{2}z \end{array}\right.$. Ce système se résout tout seul : $x = z = \frac{\sqrt{2}}{2}y$, et l'équation du milieu est alors automatiquement vérifiée. Autrement dit, $\ker(f - \sqrt{2}\,id) = \{(x, \sqrt{2}x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1))$, et l'unique vecteur $(1, \sqrt{2}, 1)$ constitue encore une fois manifestement une base du noyau.

3. Pour ne pas avoir à faire plusieurs fois les mêmes calculs, on peut anticiper en regardant ce qui est demandé à la question suivante et noter immédiatement P la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ (on ne sait pas encore qu'il s'agit d'une base) dans la base canonique, soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   La famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si cette matrice P est inversible, ce qu'on va vérifier en lui appliquant l'algorithme du pivot de Gauss.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P est donc inversible, et $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

4. On l'a déjà fait à la question précédente : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On l'a déjà fait à la question précédent la question précédente : $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

6. Le but de la question est bien entendu d'utiliser la formule du cours $A' = P^{-1}AP$, où A est la matrice de f dans la base canonique (c'est la définition même de f qui nous le confirme). Il ne reste plus qu'à effectuer le produit matriciel : $AP = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, puis $A' = P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}$, soit $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Alternativement, les plus paresseux auront constaté que $f(u) = 0$ (ce qui découle du calcule du noyau de f), $f(v) = \sqrt{2}v$ (découle du calcul du deuxième noyau de la question 2), et $f(w) = -\sqrt{2}w$ (là il faut écrire le calcul), ce qui traduit exactement le fait que la matrice de f dans la base (u, v, w) est diagonale, avec comme coefficients 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sur la diagonale.

B. Étude d'une application linéaire.

1. Par définition (et d'après le calcul de A^2 effectué dans la première partie de l'exercice), $F = \{aI + bA + cA^2 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(I, A, A^2)$, ce qui suffit à prouver que F est

bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que (I, A, A^2) forme une famille génératrice de F. Or, la famille (I, A, A^2) est également libre : si on suppose que $aI + bA + cA^2 = 0$, avec a, b et c trois réels quelconques, la nullité des trois coefficients sur la première colonne impose $a + c = b = c = 0$, donc $a = b = c = 0$. La famille est donc libre, et il s'agit donc d'une base de F, qui est accessoirement un espace vectoriel de dimension 3.

2. Soit $\forall M \in F$, d'après la question précédente, $M = aI+bA+cA^2$, donc $AM = aA+bA^2+cA^3$. Or on a prouvé dans la première partie que $A^3 = 2A$, donc $AM = (a+2c)A+bA^2 \in F$ (puisque cette matrice est combinaison linéaire de deux matrices appartenant à F).

3. (a) On vient de prouver que $AM \in F$ pour toute matrice $M \in F$, ce qui prouve que l'application g est bien définie et à valeurs dans F. Reste à prouver qu'elle est linéaire : si M et N sont deux matrices de F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $g(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda g(M) + g(N)$, ce qui prouve la linéarité de g, qui est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel F.

   (b) On a déja plus ou moins calculé plus haut $g(I) = A$, $g(A) = A^2$ et $g(A^2) = A^3 = 2A$, ce qui donne immédiatement pour matrice de g dans la base (I, A, A^2) la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Deux possibilités : soit on procède matriciellement, soit on effectue un calcul direct à partir de la définition de g. Si on choisit cette deuxième option, on calcule $g \circ g(M) = A^2M$, puis $g \circ g \circ g(M) = A^3M = 2AM = 2g(M)$, ce qui prouve bien que $g^3 = 2g$ (l'égalité est vraie quelle que soit la matrice M). Sinon, à l'aide de la matrice calculée à la question précédente, il suffit de vérifier que $B^3 = 2B$ (ce qui est facile) pour conclure.

   (d) D'après la question précédente, on a $g \circ (g^2 - 2\,id) = g^3 - 2g = 0$, ce qui suffit à affirmer que $\operatorname{Im}(g^2 - 2\,id) \subset \ker(g^2)$. En effet (si on ne connait pas ce théorème), si $y \in F$ est un élément de l'image de $g^2 - 2\,id$, cela signifie qu'on peut trouver un x appartenant à F tel que $y = g^2(x) - 2x$, mais alors $g(y) = g^3(x) - 2g(x) = 0$ d'après la question précédente, ce qui prouve que $y \in \ker(g)$, et donc l'inclusion souhaitée.

   (e) Soit $M \in F$, d'après la question 1, on peut écrire que $M = aI + bA + cA^2$, puis que $g(M) = (a + 2c)A + bA^2$. Comme (I, A, A^2) forme une base de F, la matrice $g(M)$ est nulle si et seulement si $a+2c = b = 0$, soit $b = 0$ et $a = -2c$, ou encore si $M = c(A^2 - 2I)$, avec $c \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $\ker(g) = \operatorname{Vect}(A^2 - 2I)$, et l'unique matrice (non nulle) $A^2 - 2I$ forme une base de ce noyau.

   (f) D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(g)) + \dim(\operatorname{Im}(g)) = \dim(F) = 3$. Or, la question précédente montre que $\dim(\ker(g)) = 1$, donc $\dim(\operatorname{Im}(g)) = 2$.

   (g) On constate aisément que $g(I + A) = A + A^2$, mais rien de nous prouve que c'est la seule matrice pour laquelle l'égalité est vraie. En fait, on sait même que ce n'est pas le cas : $g(M) = A + A^2 \Leftrightarrow g(M) = g(I + A) \Leftrightarrow g(M - I - A) = 0 \Leftrightarrow M - I - A \in \ker(g)$. On a déterminé le noyau de g plus haut, on peut donc conclure que tous les antécédents de $A + A^2$ par l'application g sont les matrices de la forme $M = I + A + c(A^2 - 2I)$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Problème : étude théorique de la diagonalisabilité (***).

I. Polynômes annulateurs d'un endomorphisme.

1. (a) N'importe quel polynôme ayant un coefficient constant non nul fera l'affaire, par exemple $P = X$.

   (b) L'application f étant une symétrie, $f^2 = id$, donc $X^2 - 1$ convient.

(c) Ici, on peut se contenter de prendre $P = X - 1$, mais id étant un cas (très) particulier de symétrie, on pouvait aussi garder $X^2 - 1$.

(d) Cette fois, on aura $f^2 = f$, donc on peut prendre $P = X^2 - X$.

(e) Par définition de la nilpotence, un polynôme de la forme $P = X^n$ conviendra, pour un entier n pour lequel $f^n = 0$.

(f) Un calcul trivial montre que $A^2 = 4A$, donc $f^2 = 4f$. Le polynôme $P = X^2 - 4X$ convient donc.

2. Comme on l'a vu en cours, $P(M)$ sera la matrice représentative de $P(f)$ dans la même base, donc la question est complètement triviale.

3. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ étant de dimension n^2, une famille de $n^2 + 1$ vecteurs de $\mathcal{L}(E)$ est nécessairement liée. Il existe donc une combinaison linéaire reliant les applications id_E, f, f^2 ..., f^{n^2}, ce qui revient exactement à dire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k f^k = 0$, donc qu'il existe un polynôme de degré n^2 annulant f. En fait, on peut toujours trouver un polynôme de degré nettement plus petit (au maximum n).

4. (a) C'est évident : si $P(f) = Q(f) = 0$, alors $(P + Q)(f) = 0 + 0 = 0$.

(b) C'est à nouveau évident : $RP(f) = R(f)P(f) = 0$.

(c) La propriété énoncée prouve qu'il existe un polynôme engendrant I_f (c'est le terme technique utilisé quand un idéal est constitué de tous les multiples d'un polynôme donné). Ce polynôme est nécessairement de degré minimal parmi tous les polynômes de I_f (en excluant bien entendu le polynôme nul) puisque $d^\circ(PQ) \geqslant d^\circ(P)$ si $Q \neq 0$. Quitte à le diviser par son coefficient dominant, on peut bien sûr transformer ce polynôme (qu'on va noter P_0) en polynôme unitaire, ce qui ne changera rien au fait qu'il engendre I_f. Supposons maintenant qu'il existe un deuxième tel polynôme unitaire P_1, ce deuxième polynôme est alors lui aussi de degré minimal, donc de même degré que P_0. Comme P_0 et P_1 sont tous deux unitaires, leur différence $P_0 - P_1$ est alors un polynôme de degré strictement inférieur annulant f, donc nécessairement nul. Cela prouve que $P_0 = P_1$ et donc que P_0 est unique.

II. Sous-espaces propres d'un endomorphisme.

1. C'est la définition du noyau : $u \in \ker(f - \lambda\, id) \Leftrightarrow f(u) - u = 0 \Leftrightarrow u \in E_\lambda$.

2. Tout noyau est un sous-espace vectoriel. De plus, si $u \in E_\lambda$, par définition, $f(u)$ est proportionnel à donc appartient aussi à E_λ qui est stable par produit extérieur, ce qui prouve sa stabilité par f.

3. C'est en fait exactement la même démonstration : une somme de sev est un sev, et si $(u_1, \dots, u_k) \in E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_k}$, $f(u_1 + \cdots + u_k) = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k e_k \in E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_k}$ par stabilité de ce sev par combinaisons linéaires.

4. (a) Supposons donc que $P(f) = 0$, et considérons un vecteur propre u associé à la valeur propre λ. Par définition, $f(u) = \lambda u$, donc $f^2(u) = \lambda^2 u$, puis $f^k(u) = \lambda^k u$ pour tout entier k (récurrence triviale si on veut être rigoureux). En particulier, par linéarité, on obtient $P(f)(u) = P(\lambda)u$. Comme cette image doit être nulle et que u ne peut pas être égal au vecteur nul, c'est donc que $P(\lambda) = 0$, ce qui prouve que toutes les valeurs propres de f sont racines de P. Bien entendu, c'est en particulier le cas pour P_f.

(b) Supposons donc α racine (simple) de P_f, alors le polynôme Q défini par $P_f = (X - \alpha)Q$ ne peut pas annuler f (sinon cela contredirait la minimalité de P_f). Il existe donc au moins un vecteur $u \in E$ tel que $Q(f)(u) \neq 0$. Notons donc v le vecteur $Q(f(u))$. Par définition de Q, $(f - \alpha\, id)(v) = (f - \alpha\, id)(Q(f)(u)) = P_f(u) = 0$, ce qui implique que $f(v) = \alpha v$, et donc que v est un vecteur propre associé à α, qui est donc valeur propre de f.

(c) On a prouvé les deux sens de l'équivalence dans les deux questions précédentes. Puisque P_f est un polynôme non nul admettant un nombre fini de racines, f ne peut donc avoir qu'un nombre fini de valeurs propres (pour les curieux, ce résultat serait complètement faux en dimension infinie).

5. Le fait que la réunion des bases soit une famille génératrice de la somme est assez évident : si $u \in E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_k}$, par définition, $u = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$, avec $v_i \in E_{\lambda_i}$. Comme chaque vecteur v_i peut donc s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la base choisie pour l'espace E_{λ_i}, u est donc bien combinaison linéaire de tous les vecteurs obtenus en réunissant ces différentes bases. Prouvons ensuite que la famille est libre, en procédant par récurrence forte sur le nombre k de sous-espaces E_{λ_i} dont on fait la somme. Dans le cas où $k = 2$, considérons un vecteur appartenant à $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2}$, donc $u = v_1 + v_2$, avec les mêmes conventions de notation que précédemment. Si cette combinaison linéaire des vecteurs obtenus en réunissant les deux bases de nos espaces s'annule, alors $v_2 = -v_1$. Or, par hypothèse $v_1 \in E_{\lambda_1}$, donc $f(v_1) = \lambda_1 v_1$, et de même $f(v_2) = \lambda_2 v_2$. Mais par ailleurs on doit avoir $f(v_1 + v_2) = 0$, donc $\lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2 = \lambda_2 v_1$. Les valeurs de λ_1 et λ_2 étant distinctes, cela implique que $v_1 = 0$, donc également $v_2 = 0$, ce qui prouve que la famille « réunion des bases »est libre (chacun des coefficients permettant d'obtenir v_1 comme combinaison linéaire des vecteurs de base de E_{λ_1} est nul puisqu'il s'agit d'une base, et de même pour v_2). Supposons désormais que la propriété soit vérifiée pour une somme de k sous-espaces propres, et ajoutons un $k+1$-ème espace. On procède alors comme précédemment : soit $u = v + v_{k+1}$ un vecteur décomposé comme somme d'un vecteur de $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_k}$ et d'un vecteur de $E_{\lambda_{k+1}}$. Si on suppose $u = 0$, on aura donc $v_{k+1} = -v$, et en même temps $f(v) = -f(v_{k+1}) = -\lambda_{k+1} v_{k+1} = \lambda_{k+1} v$. En décomposant v sous la forme $v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ (toujours les mêmes notations), on aura donc $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = \lambda_{k+1} v_{k+1}$, donc $\lambda_i - \lambda_{k+1} = 0$ pour tout vecteur v_i non nul en appliquant l'hypothèse de récurrence. Comme les valeurs propres sont toutes distinctes, on impose donc $v_1 = v_2 = \cdots = v_k = 0$, et il ne reste plus que la condition $v_{k+1} = 0$ qui impose la nullité des derniers coefficients (ceux concernant les vecteurs de la base de $E_{\lambda_{k+1}}$). La famille reste donc libre, ce qui achève notre récurrence.

6. C'est en fait facile : si f est diagonalisable, par définition, il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour f, donc de vecteurs appartenant à un des espaces E_λ. Cette base étant génératrice, cela prouve que E est la somme des espaces E_λ, et on vient de prouver que cette somme était nécessairement une somme directe. Réciproque, si E est somme directe des sous-espaces propres, toute réunion de bases de ces sous-espaces formera une base de E, ce qui prouve immédiatement l'existence d'une base de vecteurs propres, et donc la diagonalisabilité de f.