Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 20 : Matrices et algèbre linéaire

MPSI Lycée Camille Jullian

26 avril 2023

Exercice 1 (*)

Déterminer la matrice dans la base canonique de l'espace vectoriel E des applications linéaires suivantes (on ne vérifiera pas la linéarité) :

1. $f(x, y, z) = (x + y - 2z, 2x + y - z, -x - 3y + 2z)$, $E = \mathbb{R}^3$
2. $f(P) = (2X + 1)P - X^2P'$, $E = \mathbb{R}_2[X]$
3. $f(P) = \displaystyle\int_X^{X+2} P(t)\ dt$, $E = \mathbb{R}_2[X]$
4. $f(M) = AM + MB$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (*)

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Prouver que s est une symétrie, et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 3 (**)

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de l'application f qui, à un polynôme P, associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - X + 1$. Vérifier à l'aide de cette matrice que f est un projecteur, et en déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 4 (**)

Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = ((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ vers la base $\mathcal{C} = ((3, 1, 4), (5, 3, 2), (1, -1, 7))$.

Exercice 5 (**)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2 + X + 1)P' - (2X - 1)P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme, et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. L'application φ est-elle bijective ? Déterminer un antécédent par φ de $X^2 - 1$.
3. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + x + 1)y' - (2x - 1)y = x^2 - 1$.

Exercice 6 (***)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ un morphisme vérifiant $u^2 + u + id = 0$.

1. Montrer que u est bijectif, et déterminer u^{-1} en fonction de u.
2. Montrer que, pour tout vecteur non nul x, $\text{Vect}(x, u(x))$ est de dimension 2.

3. Prouver l'existence d'une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f devient $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les puissances de la matrice B, puis celles de A.

Exercice 8 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0$.
2. En déduire que $\ker(f - id) \oplus \ker(f + 3\,id) = \mathbb{R}^3$.
3. Donner la dimension et une base de chacun des deux noyaux de la question précédente.
4. Sans faire de calculs, déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale (et donner cette matrice).

Exercice 9 (***)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que $f^3 = 0$ mais $f^2 \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer l'ensembles des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec u. On montrera en particulier qu'ils forment un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 10 (**)

Soient $e_1 = (1, -1, -3)$, $e_2 = (1, 0, 3)$ et $e_3 = (2, -1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(e_1)$ et $G = \text{Vect}(e_2, e_3)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire sur F et G ?
2. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Quelle est la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$?
3. Calculer la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$.
4. Calculer la matrice de s dans la base canonique en exploitant les questions précédentes, en déduire l'expression analytique de s.

Exercice 11 (***)

On considère trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par leurs premiers termes x_0, y_0, z_0 et les relations suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(-x_n - 3y_n + 6z_n)$, $y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(3x_n + 5y_n - 6z_n)$ et $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(3x_n + 3y_n - 4z_n)$.

1. Montrer que ce système peut s'écrire sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et X_n, X_{n+1} sont des matrices colonnes.

2. Déterminer $S_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ et $S_{-2} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$.
3. Montrer que S_1 et S_{-2} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en donner des bases.
4. En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice A^n et en déduire X_n en fonction de X_0.

Exercice 12 (*)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on note $\mathcal{B}$ la famille $(X^2+1, X+1, 2X^2-X)$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, et celle de $\mathcal{B}$ vers la base canonique.
3. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. On considère l'endomorphisme de E défini par $\varphi(P) = XP'$. Déterminer sa matrice dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 13 (**)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans le base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Que peut-on en déduire sur f ?
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Donner la matrice de f dans une base constituée uniquement de vecteurs de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 14 (*)

Déterminer à chaque fois si la matrice A_i est semblable à la matrice B_i.

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
- $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 15 (***)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Pour un réel λ quelconque, calculer $\ker(A - \lambda I_3)$.
2. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda\, id$ n'est pas bijective.
3. Donner une base de $\ker(f - \lambda\, id)$ pour les valeurs de λ obtenues à la question précédente.
4. En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 16 (**)

On note dans cet exercice $E = \mathbb{R}^3$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ l'application définie par $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + z, x - y + 2z)$.

1. Déterminer la matrice A représentant l'application f dans la base canonique de E.

2. Calculer A^2, puis déterminer une relation entre A^2, A et la matrice identité I. En déduire une expression de la réciproque f^{-1} de f en fonction de f et de id.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\ker(A - \lambda I)$, et en déduire les valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda\, id$ n'est pas un automorphisme.
4. Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels $\ker(f - id)$ et $\ker(f - 2\, id)$.
5. Montrer que les deux sous-espaces étudiés à la question précédente sont supplémentaires dans E.
6. (a) Déterminer deux applications linéaires p et q telles que $p+q = id$ et $2p+q = f$ (on les exprimera en fonction de f et de id, pas besoin de donner une expression explicite).
   (b) Vérifier que p et q sont des projecteurs, et que $p \circ q = q \circ p = 0$.
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$. Cette formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?

Problème 1 (**)

On note dans tout cet exercice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On notera par ailleurs f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique (base qui sera notée $\mathcal{B}$ dans la suite de l'exercice).

On note enfin $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

A. Calcul matriciel.

1. Calculer A^2 et montrer que $A^3 = 2A$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\ker(f - \sqrt{2}\, id)$.
3. Soient $u = (1, 0, -1)$, $v = (1, \sqrt{2}, 1)$ et $w = (1, -\sqrt{2}, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, qu'on notera $\mathcal{B}'$.
4. Écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. On notera P cette matrice.
5. Déterminer l'inverse P^{-1} de la matrice P.
6. Écrire la matrice A' de l'application f dans la base $\mathcal{B}'$.

B. Étude d'une application linéaire.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et que la famille (I_3, A, A^2) en constitue une base.
2. Montrer que, $\forall M \in F$, $AM \in F$.
3. Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que $g \in \mathcal{L}(F)$.
   (b) Écrire la matrice de g dans la base (I, A, A^2).
   (c) Montrer que $g \circ g \circ g = 2g$.
   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(g^2 - 2\, id) \subset \ker(g)$.
   (e) Déterminer une base de $\ker(g)$.
   (f) Déterminer $\dim(\mathrm{Im}(g))$.
   (g) Résoudre dans F l'équation $g(M) = A + A^2$.

Problème : étude théorique de la diagonalisabilité (***).

Dans tout ce problème, f désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel E, supposé de dimension finie n. On notera comme d'habitude f^n l'endomorphisme obtenu en composant f par lui-même n fois (avec $f^0 = id_E$), et pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on posera $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$.

I. Polynômes annulateurs d'un endomorphisme.

Un polynôme P est appelé **polynôme annulateur** de f si $P(f)$ est l'application nulle.

1. Donner un polynôme annulateur de f dans chacun des cas suivants (en expliquement rapidement votre choix) :
   (a) f est l'endormorphisme nul.
   (b) $f : M \mapsto M^\top$ défini sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (c) $f = id_E$.
   (d) f est une projection (quelconque) de E.
   (e) f est un endomorphisme nilpotent.
   (f) f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Expliquer pourquoi, si M est la matrice représentative de f dans une base quelconque de E, tout polynôme annulateur de M est aussi un polynôme annulateur de f.
3. Expliquer pourquoi la famille d'applications linéaires $(id_E, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est nécessairement liée dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$. En déduire qu'il existe nécessairement un polynôme annulateur de f.
4. On note I_f l'ensemble des polynômes annulateurs de f, qui est donc un sous-ensemble non vide de $\mathbb{K}[X]$.
   (a) Montrer que I_f est stable par somme : $\forall (P,Q) \in I_f^2$, alors $P + Q \in I_f$.
   (b) Montrer que $\forall P \in I_f$, $\forall R \in \mathbb{K}[X]$, $RP \in I_f$.
   (c) Un sous-ensemble « stable par somme et par produit par n'importe quel polynôme » est appelé **idéal** de $\mathbb{K}[X]$. On admet que, pour tout idéal I de $\mathbb{K}[X]$, il existe toujours un polynôme $P \in I$ tel que $I = \{PQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Montrer alors, que pour $I = I_f$, il existe un unique polynôme P_f **unitaire** qui vérifie $I_f = \{P_f Q \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Ce polynôme P_f sera alors appelé **polynôme minimal** de f.

II. Sous-espaces propres d'un endomorphisme.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f, on appelle **sous-espace propre associé à** λ le sous-ensemble $\{u \in E \mid f(u) = \lambda u\}$. On le notera pour la suite E_λ ce sous-espace propre. On rappelle que, par définition, λ valeur propre de f implique $E_\lambda \neq \{0\}$.

1. Montrer que $E_\lambda = \ker(f - \lambda\, id_E)$.
2. Montrer que E_λ est un sev de E stable par l'application f.
3. Montrer plus généralement que, si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des valeurs propres de f, alors $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_k}$ est un sev de E stable par f.
4. On veut désormais faire le lien entre le polynôme minimal P_f défini dans la première partie, et les valeurs propres de f.
   (a) En considérant un vecteur propre associé à λ, montrer que toute valeur propre de f est racine de tout polynôme annulateur de f, et donc de P_f.
   (b) Réciproquement, si α est racine de P_f, en factorisant sous la forme $P_f = (X - \alpha)Q$, montrer que α est nécessairement valeur propre de f.
   (c) En déduire que le spectre de f est constitué des racines de P_f, et qu'il contient donc un nombre fini de valeurs propres.
5. Montrer que les sous-espaces propres E_{λ_i} associés aux différentes valeurs propres de f sont en somme directe (notion non définie en cours pour plus de deux espaces), c'est-à-dire que la réunion de bases de ces sous-espaces propres forme une base de leur somme.
6. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$, où $Sp(f)$ désigne le spectre de f, et la notation $\oplus$ désigne une somme directe telle que décrite à la question précédente.