

# Feuille d'exercices n° 26 : espaces préhilbertiens.

MPSI Lycée Camille Jullian

7 juin 2022

## Exercice 1 (\* à \*\*)

Montrer que les applications suivantes sont des produits scalaires :

1.  $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2) dt$  sur  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .
2.  $(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$  sur  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ .
3.  $(P, Q) \mapsto P(1)Q(1) + P'(2)Q'(2) + P''(0)Q''(0)$  sur  $E = \mathbb{R}_2[X]$ .
4.  $(P, Q) \mapsto \int_0^{2\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta)) d\theta$  sur  $\mathbb{R}[X]$ .
5.  $((u_n), (v_n)) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ , sur  $E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty \right\}$ .

## Exercice 2 (\*)

Orthonormaliser à l'aide de Gram-Schmidt les familles suivantes :

1.  $\mathcal{F} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$  dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire canonique.
2.  $(f, g, h)$ , où  $f(t) = 1$ ,  $g(t) = t$  et  $h(t) = |t|$ , dans  $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  pour le produit scalaire

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

3.  $(1, X, X^2, X^3)$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$  muni du produit scalaire  $P \cdot Q = \sum_{i=0}^3 P(i)Q(i)$ .

## Exercice 3 (\*\*)

On se place dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire canonique et on pose  $u = (1, 2, 2)$ ,  $v = (-1, 4, 1)$  et  $w = (2, 5, 1)$ .

1. Vérifier que  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Orthonormaliser la base  $(u, v, w)$  en appliquant le procédé de Gram-Schmidt.
3. On note  $F = \text{Vect}(u, v)$ . Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur  $F$  (qu'on notera  $p$ ).
4. Déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion  $s$  par rapport à  $E$ .

## Exercice 4 (\*\*)

On se place dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_3[X]$  muni du produit scalaire  $P \cdot Q = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ .

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur  $E$ .
2. Déterminer une base orthonormale de  $E$  pour ce produit scalaire.
3. Calculer la distance de  $X^3$  à  $\mathbb{R}_2[X]$ .

- En déduire la valeur de  $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 + at^2 + bt + c)^2 dt$ .
- Tracer dans un même repère une allure des courbes représentatives sur  $[-1, 1]$  de la fonction cube et de son projeté orthogonal calculé à la question 3. Commenter le résultat obtenu.

### Exercice 5 (\*\*\*)

Soit  $p$  un projecteur d'un espace vectoriel euclidien  $E$ . Montrer que  $p$  est un projecteur orthogonal si et seulement si  $\forall u \in E, \|p(u)\| \leq \|u\|$ .

### Exercice 6 (\*\*)

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des réels strictement positifs tels que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Montrer que  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$ . Préciser à quelle condition cette inégalité devient une égalité.

### Exercice 7 (\*\*)

Montrer les inégalités suivantes :

- $\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{(n+1)2^n}$ .
- si  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n x_k^2$ . Quand a-t-on égalité?
- si  $f$  est continue strictement positive sur  $[0, 1]$ ,  $\left(\int_0^1 f(t) dt\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^3 dt \times \int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt$ .
- si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , ne s'annule pas, et vérifie  $\int_a^b f(t) dt = 1$ , alors  $\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq (b-a)^2$ .  
Quand a-t-on égalité?

### Exercice 8 (\*\*\*)

On se place dans l'espace  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  (espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ). On pose,  $\forall (f, g) \in E^2$ ,  $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t) dt$ . On notera par ailleurs  $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ , et  $G = \{f \in E \mid f'' = f\}$ .

- Vérifier que  $\varphi$  est un produit scalaire sur l'espace  $E$ .
- Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
- Donner une expression explicite de la projection orthogonale sur  $G$ .
- On note enfin  $E_{a,b} = \{f \in E \mid f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$ .
  - Exhiber une fonction  $f_0 \in E_{a,b}$ , calculer sa projection orthogonale sur  $F$  et montrer que  $E_{a,b} = \{f_0 + h \mid h \in F\}$  (quelle structure a-t-on ainsi défini sur l'ensemble  $E_{a,b}$  ?).
  - Déterminer la valeur de  $\inf_{f \in E_{a,b}} \int_0^1 (f^2(t) + f'^2(t)) dt$ .

### Exercice 9 (\*\*)

Sur l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , on considère le produit scalaire défini par  $P \cdot Q = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ .

- Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur  $E$ .
- Calculer  $X^i \cdot X^j$  pour tous entiers  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ .
- En déduire une base orthonormale de  $E$  pour ce produit scalaire.
- Déterminer le projeté orthogonal d'un polynôme quelconque  $P$  sur  $\mathbb{R}_k[X]$ , pour  $k < n$ .

## Exercice 10 (\*)

Dans  $\mathbb{R}^4$  muni de son produit scalaire canonique, on pose  $F = \{(x, y, z, t) \mid x+y+z+t = x-y+z-t = 0\}$ . Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à  $F$ , puis de la symétrie orthogonale par rapport à  $F^\perp$ .

## Exercice 11 (\*)

Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  muni de son produit scalaire canonique, on note  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

1. Déterminer une base orthonormale de  $F$ .
2. Calculer la projection orthogonale d'une matrice  $M$  sur  $F$ .
3. Calculer la distance de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  à  $F$ .

## Exercice 12 (\*\*)

On souhaite calculer  $m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t - a\sqrt{t} - b)^2 dt$ .

1. Calculer  $m$  en utilisant la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien.
2. Retrouver la valeur de  $m$  par une méthode directe.
3. Calculer de même (avec deux méthodes!)  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$ .

## Exercice 13 (\*\*\*)

Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs dans un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$ . On appelle matrice de Gram de la famille la matrice  $(u_i \cdot u_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ , et déterminant de Gram son déterminant, noté  $G(u_1, \dots, u_n)$ .

1. Exprimer la matrice de Gram en fonction de la matrice  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ , où  $\mathcal{B}$  est une base orthonormale quelconque de  $E$ .
2. Montrer que  $\ker(M^\top M) = \ker(M)$ , en déduire que la matrice de Gram a le même rang que la famille  $(u_1, \dots, u_n)$ .
3. En déduire que  $G(u_1, \dots, u_n) = 0$  si et seulement si la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  n'est pas libre.
4. Montrer que, si  $u_n \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1}))^\perp$ , alors  $G(u_1, \dots, u_n) = G(u_1, \dots, u_{n-1}) \times \|u_n\|^2$ .
5. Si  $F$  est un sous-espace de  $E$  de base  $(f_1, \dots, f_k)$ , montrer que, pour tout vecteur  $u \in E$ ,

$$d(u, F) = \sqrt{\frac{G(f_1, \dots, f_k, u)}{G(f_1, \dots, f_k)}}.$$

## Exercice 14 (\*\*\*)

Soient  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  des vecteurs distincts d'un espace euclidien de dimension  $n$  vérifiant  $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, k\}^2, i \neq j \Rightarrow u_i \cdot u_j < 0$ . Montrer que  $k \leq n + 1$  (autrement dit, on ne peut pas placer plus de  $n + 1$  vecteurs en dimension  $n$  faisant des angles deux à deux obtus).

## Exercice 15 (\*\*\*)

Dans  $E = \mathbb{R}[X]$ , on définit une forme bilinéaire par  $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n P(t)Q(t)e^{-t} dt$ .

On posera par ailleurs, pour tout entier naturel  $n$ ,  $f_n(x) = x^n e^{-x}$ , et  $h_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x)$ .

1. Calculer  $h_0, h_1, h_2, h_3$  et représenter dans un même repère l'allure des courbes représentatives de ces polynômes sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

2. Justifier que  $h_n$  est toujours une fonction polynômiale, et calculer explicitement ses coefficients.
3. Vérifier que  $\varphi$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
4. Montrer que la famille  $(h_0, \dots, h_n)$  est toujours une famille orthogonale.
5. Calculer  $\|h_n\|$ , en déduire une base orthonormale de  $\mathbb{R}_n[X]$  pour le produit scalaire  $\varphi$ .
6. Calculer  $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$  (on précisera le projeté orthogonal de  $X^3$  sur  $\mathbb{R}_2[X]$  lors du calcul).

### Exercice 16 (\*)

Soit  $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 & b \\ -2 & -6 & c \\ 6 & a & d \end{pmatrix}$ . Déterminer des valeurs de  $a, b, c$  et  $d$  telles que  $A \in SO_3(\mathbb{R})$ .

### Exercice 17 (\*\*)

Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques des deux endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes :

$$a) \quad A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad b) \quad B = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

### Exercice 18 (\*\*\*)

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , montrer que  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$ .

### Problème (\*\*\*)

On s'intéresse dans cet exercice à une famille célèbre de polynômes, les polynômes de Legendre, définis de la façon suivante : pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $P_n = (X^2 - 1)^n$ , puis  $L_n = \frac{1}{2^n n!} P_n^{(n)}$  (ce sont les polynômes  $L_n$  qui sont appelés polynômes de Legendre). On notera par ailleurs, pour tout polynôme  $P$ ,  $f(P) = ((X^2 - 1)P)'$ .

1. Calculer explicitement  $L_0, L_1, L_2$  et  $L_3$ .
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes  $L_n$ , et vérifier que  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
3. Déterminer la parité des polynômes  $L_n$ .
4. Montrer que  $L_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^k (X+1)^{n-k}$ , en déduire la valeur de  $L_n(1)$  et  $L_n(-1)$ .
5. Montrer que  $P'_{n+1} - 2(n+1)XP_n = 0$ , puis que  $(X^2 - 1)P'_n - 2nXP_n = 0$ .
6. En déduire que  $L'_{n+1} = XL'_n + (n+1)L_n$ , et que  $f(L_n) = n(n+1)L_n$ . Donner la matrice de  $f|_{\mathbb{R}_n[X]}$  dans la base  $(L_0, \dots, L_n)$ .
7. On pose désormais,  $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ ,  $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .
  - (b) Montrer que  $\varphi(f(P), Q) = \varphi(P, f(Q))$ .
  - (c) Montrer que la famille  $(L_0, \dots, L_n)$  est orthogonale pour  $\varphi$ .
  - (d) Montrer que  $\|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$ .
  - (e) Calculer la distance de  $X^{n+1}$  à  $\mathbb{R}_n[X]$ .