Feuille d'exercices n° 22 : Fractions rationnelles.

MPSI Lycée Camille Jullian

10 mai 2023

Exercice 1 (**)

Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions suivantes :

- $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$
- $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$
- $\dfrac{1}{X^2+X+1}$
- $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
- $\dfrac{2}{X(X-1)^2}$
- $\dfrac{3}{(X^3-1)^2}$

Exercice 2 (*)

1. Montrer que $F=\dfrac{1}{X}$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}(X)$ (une primitive étant bien sûr définie comme une fraction rationnelle ayant pour dérivée la fonction étudiée).
2. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2=X$.
3. Déterminer toutes les fractions rationnelles F vérifiant $F(X+1)-F(X)=\dfrac{X+3}{X(X-1)(X+1)}$.

Exercice 3 (** à ***)

Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

- $F_1=\dfrac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$
- $F_2=\dfrac{X}{X^4+1}$
- $F_3=\dfrac{X^5-X^4+1}{X^3-X}$
- $F_4=\dfrac{X^7+3}{(X^2+X+2)^2}$
- $F_5=\dfrac{X^5+X+1}{X^6-1}$
- $F_6=\dfrac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$
- $F_7=\dfrac{X^6}{(X^3-1)^2}$
- $F_8=\dfrac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$
- $F_9=\dfrac{4X^6-2X^5+11X^4-X^3+11X^2+2X+3}{X(X^2+1)^3}$
- $F_{10}=\dfrac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$ (on pourra poser en cours de route $X=Y+1$ pour simplifier le calcul)

Exercice 4 (**)

Déterminer un supplémentaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 5 (**)

Calculer dans $\mathbb{C}(X)$ les décompositions en éléments simples des fractions suivantes (n est toujours un entier naturel $\geqslant 1$) :

- $F_1 = \dfrac{1}{X^n - 1}$
- $F_2 = \dfrac{1}{(X-1)(X^n - 1)}$
- $F_3 = \dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$
- $F_4 = \dfrac{n!}{X(X-1)(X-2)\dots(X-n)}$

Exercice 6 (*)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

1. Écrire la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{P''}{P}$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)} = 0$

Exercice 7 (** à ***)

Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+4)(x+1)}\, dx$
- $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x-2)^2}\, dx$
- $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)^3}\, dx$
- $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x^3+1)}\, dx$

Exercice 8 (***)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à racines simples $a_1, a_2, \dots, a_n$.

1. Exprimer à l'aide de P' et éventuellement de P'' les sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - a_i}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X-a_i)^2}$, et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \frac{1}{(X-a_i)(X-a_j)}$.
2. Montrer que, si z est racine de P' mais $P(z) \neq 0$, alors $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, où les coefficients λ_i sont des réels positifs ou nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 9 (***)

Soit P un polynôme de degré n tel que $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\displaystyle\int_0^1 t^k P(t)\, dt = 0$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (P(t))^2\, dt = (n+1)^2 \left(\int_0^1 P(t)\, dt\right)^2$.