Feuilles d'exercices n° 3: Fonctions usuelles

MPSI B Lycée Camille Jullian

22 septembre 2022

Exercice 1 (*)

Déterminer le domaine de définition des fonctions définies par les équations suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$
2. $f(x) = e^x \ln(x+5)$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x(x-1)}}{x^2-4}$
4. $f(x) = \ln(x^5 + 1)$

Exercice 2 (* à **)

Déterminer la parité des fonctions définies par les équations suivantes :

1. $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^2 + 6$
2. $f(x) = \ln|x|$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3-2x)^2} \times \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2+2}}$
4. $f(x) = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2-1)|$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 3 (** à ***)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations, inéquations et systèmes suivants :

1. $x^4 + x^2 - 20 = 0$
2. $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$
3. $\ln(x+2) - \ln(2x-6) \leqslant \ln 2$
4. $\dfrac{-x^3 - 2x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \geqslant -1$
5. $x - 1 \leqslant \sqrt{x+2}$
6. $\ln(x+3) + \ln(x-1) = 2\ln 2$
7. $3 \times 2^{3x-4} \geqslant 2^4$
8. $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5$
9. $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$
10. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
11. $x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3 = 0$
12. $e^{-6x} + 3e^{-4x} - e^{-2x} - 3 = 0$
13. $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} \leqslant 4$

14. $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 520 \\ \log x & + & \log y & = & 4 \end{array}\right.$
15. $4\operatorname{ch}(x) + 3\operatorname{sh}(x) - 4 = 0$
16. $\ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) \leqslant \ln(2)$
17. $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ (on pourra poser $X = x + \dfrac{1}{x}$)
18. $\log_2(x) + \log_4(x) + \log_8(x) = \dfrac{11}{2}$
19. $\left\{\begin{array}{ccccc} \operatorname{ch}(x) & + & \operatorname{ch}(y) & = & 4 \\ \operatorname{sh}(x) & + & \operatorname{sh}(y) & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 4 (**)

Déterminer **sans calculer leur dérivée** les variations des fonctions définies par les équations suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{-5}{2e^{-2x+3}}$
2. $f(x) = (e^x + 2)^2 - 3$
3. $f(x) = (e^x - 3)^2 + 2$
4. $f(x) = \ln(e^{-x} - 1)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Exercice 5 (* à ***)

Étudier les variations et tracer la courbe représentative des fonctions définies par les équations suivantes :

1. $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$
2. $f(x) = x^x$
3. $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$
4. $f(x) = e^{x^2 - x - 1}$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}\right)$
6. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 1}$
7. $f(x) = x^{x^2}$
8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{2a - x}}$, a étant une constante positive fixée.
9. $f(x) = x^{-\ln(x)}$

Exercice 6 (**)

On définit une fonction f par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. Étudier complètement la fonction f, et tracer une allure de sa courbe représentative.
2. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) tels que $2 \leqslant a < b$ et $a^b = b^a$.
3. Entre e^π et π^e, quel est le nombre le plus grand ?

Exercice 7 (*)

Soit f une fonction vérifiant, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = \dfrac{f(x)-5}{f(x)-3}$. Montrer que la fonction f est forcément 4-périodique.

Exercice 8 (*)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telles que, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) + 3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2$.

Exercice 9 (**)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

1. Donner la représentation graphique de la fonction f.
2. On pose $g(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > y\}$. Vérifier que g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et donner sa représentation graphique.
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 10 (**)

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}(x) = \dfrac{2}{\text{th}(2x)} - \dfrac{1}{\text{th}(x)}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \,\text{th}(2^k x)$.

Exercice 11 (*)

Pour tout réel strictement positif m, on définit la fonction f_m par $f_m(x) = \ln(e^x + me^{-x})$. On notera $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de la fonction f_m.

1. Quel est le domaine de définition des fonctions f_m ?
2. Étudier les variations de la fonction f_n, puis montrer que $\mathcal{C}_m$ admet deux asymptotes, dont l'une est commune à toutes les courbes de la famille.
3. Quelle transformation simple faut-il effectuer à partir de la courbe $\mathcal{C}_1$ pour obtenir la courbe $\mathcal{C}_m$?

Exercice 12 (**)

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $(E) : x^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$.

1. On pose $f(x) = \sqrt{x}\ln(x) + \ln(2)$. Donner le domaine de définition de f, et préciser ses limites aux bornes de ce domaine.
2. Étudier les variations de la fonction f, et dresser un tableau de variations complet de la fonction.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ (on rappelle que $\ln(2) \simeq 0.69$, et $\dfrac{1}{e} \simeq 0.36$).
4. On va chercher les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = \dfrac{1}{n^2}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $f\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 0 \Leftrightarrow n^2 = 2^n$.

(b) En déduire que n doit être pair puis, en posant $n = 2p$, que $2^{p-1} = p$.

(c) Trouver deux solutions évidentes à cette dernière équation, et en déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

5. Conclure en donnant les solutions de l'équation (E).

Exercice 13 (**)

Dans tout cet exercice, on cherche à étudier la fonction f définie par l'équation $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$, et dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse $\ln 2$.
6. Démontrer que $\forall x \in [0, +\infty[$, $-\dfrac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.
7. Montrer à l'aide de la question précédente que $\forall x \in [0, +\infty[$, $-\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4} \leqslant f(x)$.
8. Tracer dans un même repère la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4}$, et la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 14 (**)

On pose pour cet exercice $f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f. Calculer ses limites aux bornes de ce domaine.
2. On constate aisément que $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(1-x) = f(x)$. Cette égalité traduit une symétrie de $\mathcal{C}_f$ par rapport à une droite, laquelle ?
3. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations complet.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$. Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}_f$?
5. Tracer une allure de $\mathcal{C}_f$ tenant compte de tous les calculs effectués jusqu'ici.
6. Déduire des questions précédentes la valeur minimale prise par l'expression $x^x \times (1-x)^{1-x}$ lorsque $x \in]0, 1[$.

Exercice 15 (**)

On cherche dans cet exercice à étudier la fonction f définie par $f(x) = x + 2\ln(\mathrm{ch}(x))$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer les valeurs exactes de $f(0)$, $f(\ln(2))$ et $f(-\ln(3))$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis dresser le tableau de variations de f (sans limites pour l'instant).
4. En factorisant $\mathrm{ch}(x)$ par e^x ; prouver que la droite d'équation $y = 3x - 2\ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$. Préciser la position relative de la courbe et de cette asymptote.
5. Effectuer un calcul similaire en $-\infty$, avec une factorisation légèrement différente du ch.
6. Tracer une allure de la courbe représentative de f, ainsi que de ses deux asymptotes obliques.

Exercice 16 (***)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x(\ln(x))^n$ (les fonctions f_n sont donc définies sur $\mathbb{R}^{+*}$), et on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

1. Quelles sont les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition ?
2. Effectuer l'étude des variations des fonctions f_1 et f_2 (on dressera un tableau de variations complet à chaque fois).
3. Résoudre l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ et en déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Vérifier plus généralement qu'il existe deux points du plan qui sont communs à toutes les courbes $\mathcal{C}_n$.
4. Étudier plus généralement les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
5. Que peut-on dire des positions de toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ sur l'intervalle $]0, 1[$ (soyez le plus précis possible) ?
6. Tracer dans un même repère une allure soignée des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
7. Généraliser les résultats de la question 2 en étudiant les variations de f_n pour tout entier $n \geqslant 1$ (on pourra distinguer deux cas suivant la parité de n).

Exercice 17 (**)

On définit la fonction f par l'équation $f(x) = x \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) + \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. On va commencer l'étude de f par celle de ses limites et asymptotes.
   (a) Déterminer rigoureusement la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
   (b) Étudier le signe de $x \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$, et en déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (c) En posant $x = \dfrac{2}{u}$, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = 2$. En déduire la présence d'une asymptote oblique à la courbe réprésentative de f en $+\infty$, dont on précisera l'équation.
3. On va maintenant passer à l'étude des variations.
   (a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
   (b) On pose $g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{4}$. Effectuer une étude complète de la fonction g (la courbe n'est pas demandée).
   (c) Déduire de la question précédente que, $\forall x > 0$, $g(x) > 0$, en déduire le tableau de variations de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 1 (on donnera si besoin des valeurs approchées de son coefficient directeur et de son ordonnée à l'origine).
5. Tracer la courbe représentative de f ainsi que la tangente calculée à la question précédente dans un même repère.

Exercice 18 (**)

Démontrer les formules d'addition suivantes pour les fonctions hyperboliques (valables pour tout réel x) :

1. $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)$
2. $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$
3. $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$

Exercice 19 (***).

On cherche dans cet exercice à étudier la réciproque de la fonction sinus hyperbolique, étude qui n'est plus au programme de MPSI. La fonction réciproque porte le nom d'**argument sinus hyperbolique** et est habituellement notée Argsh.

1. Donner le tableau de variations de la fonction Argsh ainsi qu'une allure de sa courbe (on rappellera l'allure de la courbe de sh dans le même repère).
2. Résoudre l'équation $\text{sh}(x) = 1$.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\text{sh}(x) = y$ (on exprimera l'unique solution de cette équation en fonction de y, en utilisant une méthode très similaire à celle de la question précédente).
4. En déduire une expression explicite de la fonction Argsh.
5. À l'aide de l'expression précédente, calculer la dérivée Argsh' de la fonction Argsh.
6. Vérifier que cette dérivée est cohérente avec la formule de dérivée de la réciproque vue en cours (on aura sûrement besoin à un moment ou à un autre de la formule classique $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$, valable pour tout réel x).
7. Si on souhaite définir une réciproque de la fonction ch (qui sera logiquement notée Argch), à quel intervalle faut-il restreindre cette dernière ? Donner une formule pour la fonction Argch en utilisant la même technique que ci-dessus.
8. Déterminer une formule simple pour la réciproque Argth de la fonction th, et calculer sa dérivée. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-t^2}\,dt$.

Exercice 20 (***)

On note dans tout cet exercice E l'ensemble de toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et F le sous-ensemble de E constitué des applications bijectives. Dans tout l'exercice on considèrera qu'une application est nécessairement définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (pas de valeur interdite). On définit enfin une relation binaire $\sim$ sur l'ensemble E de la façon suivante : $f \sim g$ si et seulement si $\exists h \in F,\ g = h^{-1} \circ f \circ h$.

1. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble E.
2. Quelle est la classe d'équivalence de la fonction f constante égale à 0 pour cette relation ?
3. Quelle est la classe d'équivalence de l'application id pour cette relation ?
4. On suppose que f est une application injective. Montrer que, si $f \sim g$, alors g est aussi injective.
5. On suppose que f est une application surjective. Montrer que, si $f \sim g$, alors g est aussi surjective.
6. Deux applications bijectives appartiennent-elles nécessairement à la même classe d'équivalence ?
7. Montrer que, si $f \in F$ et $f \sim g$, alors $g \in F$, et $f^{-1} \sim g^{-1}$.
8. En notant $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$, montrer que $f \sim g \Rightarrow f^n \sim g^n$.
9. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est réciproque de la fonction sh.
10. À l'aide de la question précédente, montrer que les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x$ et $g(x) = 2x\sqrt{1+x^2}$ appartiennent à la même classe d'équivalence pour la relation $\sim$.

Problème 1 (***)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

I. Étude de f et de sa réciproque.

1. Étudier les variations et limites de la fonction f.
2. (a) Déterminer la dérivée seconde f'' de la fonction f et vérifier qu'elle s'annule en une unique valeur α.

(b) Donner l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α. En quel point (T) coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

(c) Étudier la position relative de (T) et de $\mathcal{C}_f$ (on pourra dériver deux fois la différence des deux équations si besoin).

3. Tracer dans un même repère (T) et $\mathcal{C}_f$.
4. Montrer que la fonction f est bijective de $[-1; +\infty[$ vers un intervalle à préciser. On note g la réciproque de la fonction f sur cet intervalle. Donner le tableau de variations complet de la fonction g.
5. Exprimer la dérivée g' de la fonction g en fonction de x et de $g(x)$, sans utiliser d'exponentielle. En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction g.
6. Montrer que l'équation $2^x = x$ admet pour solution $x = -\dfrac{g(-\ln(2))}{\ln(2)}$ (qu'on ne cherchera bien sûr pas à expliciter plus).
7. Exprimer de même une solution de l'équation $x^x = 3$ en faisant intervenir la valeur $g(\ln(3))$.

II. Des fonctions auxiliaires.

On considère désormais, pour tout réel $a > 0$, la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x) = e^{-x} + ax^2$.

1. Établir le tableau de variations de la fonction h_a (en exploitant les résultats de la première partie). On montrera en particulier que h_a admet un minimum en un point m_a que l'on exprimera en fonction de a et à l'aide de la fonction g. Montrer que $h_a(m_a) = am_a(m_a + 2)$.
2. On note enfin i la fonction $i : a \mapsto m_a$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Étudier les variations de la fonction i ainsi que ses limites.
3. Montrer que la valeur du maximum de h_a est une fonction croissante du paramètre a, et déterminer sa limite lorsque a tend vers $+\infty$.

Problème 2 : Un peu de géométrie ! (**)

Le but de ce problème est de déterminer la forme des triangles ayant une aire maximale à périmètre fixé.

I. Une inégalité classique.

1. Démontrer à l'aide d'une étude de fonction que, $\forall a \in [0, 1]$, $a(1-a)^2 \leqslant \dfrac{4}{27}$.
2. On fixe désormais une valeur de $a \in [0, 1]$, et on pose $f_a(x) = -ax^2 + a(1-a)x$.

(a) Déterminer le maximum de la fonction f_a sur l'intervalle $[0, 1-a]$.

(b) En déduire la propriété suivante : si a, b et c sont trois réels positifs tels que $a+b+c = 1$, alors $abc \leqslant \dfrac{1}{27}$.

(c) Dans quels cas l'inégalité démontrée à la question précédente est-elle une égalité ?

3. En utilisant la propriété démontrée à la question 2.b, prouver que, quels que soient les réels positifs x, y et z, on a $xyz \leqslant \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$.
4. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $x = y = z$.

II. Applications aux triangles.

Soit $p > 0$. On considère un triangle de côtés a, b et c tels que $a + b + c = 2p$ (autrement dit, p est le demi-périmètre du triangle), et on admet que l'aire $\mathcal{A}$ de ce triangle peut être obtenue par la formule de Héron : $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

1. On note $x = p - a$, $y = p - b$ et $z = p - c$, justifier que ces trois nombres sont positifs.
2. En appliquant les résultats de la première partie, déterminer la valeur maximale de $\mathcal{A}$ (en fonction de p).
3. À quoi ressemble le triangle dans le cas où l'aire est maximale ?

Problème 3 (**)

Pour tout entier naturel n, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + n\ln(x)$. On notera $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

A. Étude de la fonction f_0.

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} + x - 1 \geqslant 0$, et en déduire que $1 + (x-1)e^x \geqslant 0$.
2. Déterminer les limites de la fonction f_0 aux bornes de son domaine de définition.
3. Étudier les variations de la fonction f_0.
4. Tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_0$.

B. Étude de la famille de fonctions (f_n).

1. Déterminer le sens de variation des fonctions f_n.
2. Déterminer les limites des fonctions f_n aux bornes de leur ensemble de définition.
3. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$. On précisera en particulier les coordonnées d'un point commun à toutes les courbes $\mathcal{C}_n$.
4. Montrer que la fonction f_1 s'annule en un unique réel qu'on notera α_1.
5. Montrer que $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout entier $n > 1$, puis que la fonction f_n s'annule en un unique réel α_n vérifiant $\alpha_1 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$.
6. Montrer que, $\forall x \in]0, 1]$, $\dfrac{e^x - 1}{x} \leqslant e - 1$. En déduire que $\ln(\alpha_n) \geqslant \dfrac{1 - e}{n}$.
7. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite (α_n).
8. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

C. Un peu de calcul d'intégrales.

On note désormais $I_n = \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f_n(t)\ dt$.

1. Quelle est la monotonie de la suite (I_n) ?
2. La suite (I_n) est en fait une suite d'un type bien connu. Préciser lequel.