Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 17 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

14 mars 2023

Exercice 1 (*)

1. $u_n \sim \dfrac{n^{\frac{5}{2}}}{2n} \sim \dfrac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$ (au numérateur, $n^{\frac{5}{2}}$ l'emporte certainement face à n^2, et au dénominateur, par croissance comparée, $\ln(2n) = o(2n)$).
2. $u_n \sim ne^{-n-1}$, qu'on ne peut pas simplifier davantage (si on tient à l'écrire autrement, $u_n \sim \dfrac{n}{e \times e^n}$.
3. $u_n = \dfrac{\ln(n^2) + \ln(1 + \frac{1}{n^2})}{n^2+1} \sim \dfrac{2\ln(n)}{n^2}$.
4. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2+2}\right) \sim -\dfrac{1}{n^2+2} \sim -\dfrac{1}{n^2}$ puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2+2} = 0$.
5. $u_n = \dfrac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \dfrac{2n}{n+o(n)+n+o(n)} \sim \dfrac{2n}{2n} \sim 1$.
6. Celle-ci est un peu plus tordue : d'un côté $u_n \geqslant n!$ (c'est assez évident), de l'autre $u_n = n! + (n-1)! + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} k! \leqslant n! + (n-1)! + (n-1)(n-2)!$ en majorant brutalement chaque terme de la dernière somme par la plus gros, à savoir $(n-2)!$. En divisant tout par $n!$, on obtient l'encadrement $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n!} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}$. Les deux termes extrêmes ont manifestement pour limite commune 1, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n!} = 1$, c'est-à-dire $u_n \sim n!$.
7. $u_n = \dfrac{e^{\sqrt{n+1}\ln n}}{e^{\sqrt{n}\ln(n+1)}} = e^{\sqrt{n+1}\ln(n) - \sqrt{n}\ln(n+1)}$. Tentons de trouver un équivalent de ce qui se trouve dans l'exponentielle : $\sqrt{n+1}\ln(n) - \sqrt{n}\ln(n) - \sqrt{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\ln(n) - \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{n}+o(\sqrt{n})}\ln(n) - \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Par croissance comparée, le premier terme tend vers 0, donc le tout a également une limite nulle. Par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$, ou si on préfère $u_n \sim 1$.

Exercice 2 (**)

Puisque la suite est décroissante, on peut certainement écrire $2u_{n+1} \leqslant u_{n+1} + u_n \leqslant 2u_n$, ou encore $\dfrac{u_{n+1}+u_n}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{u_n+u_{n-1}}{2}$ quitte à décaler les indices pour obtenir l'inégalité de droite. En multipliant tout par n, on a donc $\dfrac{n(u_{n+1}+u_n)}{2} \leqslant nu_n \leqslant \dfrac{n(u_n+u_{n-1})}{2}$. Par hypothèse, le membre de gauche a pour limite $\dfrac{1}{2}$ puisque $u_{n+1}+u_n \sim \dfrac{1}{n}$. De même, on aura $u_{n-1}+u_n \sim \dfrac{1}{n-1} \sim \dfrac{1}{n}$, donc le membre de droite également a pour limite $\dfrac{1}{2}$. En appliquant le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{2}$, soit $u_n \sim \frac{1}{2n}$. En particulier, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Si on ne suppose pas la suite (u_n) décroissante, ça ne marche absolument plus du tout ! Si on pose $u_1 = 5$ puis $u_{n+1} = \frac{1}{n} - u_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, on aura toujours $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n}$ (donc a fortiori l'équivalence demandée par l'énoncé), et la suite ne tend même pas vers 0. En effet, on a alors $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k+1}}{k} + 5(-1)^{n+1}$. On peut prouver que la somme se rapproche alternativement de $\ln(2)$ et $-\ln(2)$ selon la parité de n, donc les sous-suites d'indices pairs et impairs de la suite ont des limites respectives $\ln(2) - 5$ et $-\ln(2) + 5$, et la suite ne converge pas.

Exercice 3 (***)

1. Manifestement, $u_n \geqslant \sqrt{n}$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Il suffit d'écrire que $u_{n+1} = \sqrt{n+1+\sqrt{n+\dots+\sqrt{1}}} = \sqrt{n+1+u_n}$.
3. Allons-y pour une récurrence : $u_1 = 1 \leqslant 1$ est vrai. Supposons donc $u_n \leqslant \sqrt{n}$, et déduisons-en en utilisant l'égalité précédente que $u_{n+1} \leqslant \sqrt{n+1+n} \leqslant \sqrt{2n+1}$. Reste à vérifier que $\sqrt{2n+1} \leqslant n+1$. C'est évident quand on élève l'inégalité au carré (on peut, tout est positif) : $2n+1 \leqslant n^2+2n+1$ puisque $n^2 \geqslant 0$. L'inégalité reste donc vraie au rang $n+1$, ce qui achève la récurrence. Une fois qu'on sait que $u_n \leqslant n$, on peut écrire $u_{n+1} \leqslant \sqrt{2n+1}$, donc $u_{n+1} = o(n)$, ce qui prouve la négligeabilité de u_n par rapport à n.
4. Reprenons encore notre égalité : $u_{n+1} = \sqrt{n+1+o(n)} \sim \sqrt{n+1}$, donc $u_n \sim \sqrt{n}$.
5. On peut utiliser la quantité conjuguée : $u_n - \sqrt{n} = \frac{u_n^2 - n}{u_n + \sqrt{n}}$. Or, $u_n^2 - n = u_{n-1}$ (c'est toujours une conséquence de la relation de la question 2), et $u_{n-1} \sim \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$. Le dénominateur peut s'écrire sous la forme $\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$, donc $u_n - \sqrt{n} \sim \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2}$. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2}$, ou encore $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.

Exercice 4 (** à ***)

1. $\frac{\ln(1+\tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}} \underset{0}{\sim} \frac{\tan(x)}{\sqrt{x}} \sim \frac{x}{\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$ (en utilisant simplement le fait que $\lim_{x\to 0} \tan(x) = 0$ pour la première étape).
2. $\frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} \sim x^{\frac{5}{6}}$.
3. $\ln(\cos(x)) = \ln(1+\cos(x)-1) \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ (on a utilisé que $\lim_{x\to 0} \cos(x) - 1 = 0$ pour le premier équivalent, le second est dans le cours).
4. $(x+1)^x - x^x = x^x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1\right) = x^x(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} - 1)$. Or, $x^x = e^{x\ln(x)}$ a pour limite 1 en 0 puisque, par croissance comparée, $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. Et $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ a également pour limite 0 car $\ln(1+X) \underset{+\infty}{\sim} \ln(X)$, donc $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{0}{\sim} x\ln\left(\frac{1}{x}\right) \sim -x\ln(x)$. On peut donc appliquer l'équivalent classique pour $e^u - 1$ en 0 à $u = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ pour obtenir finalement que $(x+1)^x - x^x \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$.

5. $\sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)} = \sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} = \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$.
6. $\frac{1}{\cos(x)} - \tan(x) = \frac{1-\sin(x)}{\cos(x)}$. Or, $\cos(x) = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - x$ puisque $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x - \frac{\pi}{2} = 0$; et $1-\sin(x) = 1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2}$. Finalement, $\frac{1}{\cos(x)} - \tan(x) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{2} \sim \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ (en particulier, la fonction a une limite nulle en $\frac{\pi}{2}$, ce qui est très loin d'être évident a priori).
7. En 0, utilisons que $x^{x^{\frac{1}{x}}} = x^{e^{\frac{\ln(x)}{x}}} = e^{e^{\frac{\ln(x)}{x}}\ln(x)}$. Or, $e^{\frac{\ln(x)}{x}}$ est certainement plus petit (et même négligeable, mais on n'en a pas besoin) devant $e^{\ln(x)} = x$, donc, comme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(x)}{x}}\ln(x) = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^{\frac{1}{x}}} = 1$. On a donc simplement $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x \underset{0}{\sim} 1$.
En $+\infty$, il vaut mieux s'y prendre autrement : $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x = x(x^{x^{\frac{1}{x}}-1} - 1) = x(e^{e^{\frac{\ln(x)}{x}-1}\ln(x)} - 1)$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc on peut écrire $e^{\frac{\ln(x)}{x}-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x}$, et $e^{\frac{\ln(x)}{x}-1}\ln(x) \sim \frac{\ln^2(x)}{x}$, qui a également pour limite 0 en $+\infty$. On peut donc utiliser une seconde fois l'équivalent classique de l'exponentielle : $e^{e^{\frac{\ln(x)}{x}-1}\ln(x)} - 1 \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{\ln(x)}{x}-1}\ln(x) \sim \frac{\ln^2(x)}{x}$. Il ne reste plus qu'à multiplier le tout par x pour obtenir $x^{x^{\frac{1}{x}}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \ln^2(x)$.
8. Regardons déjà ce qui se passe en $+\infty$: $\frac{\ln(x^2+1)-\ln(2x^2+1)}{\ln(x^3+1)-\ln(x^3-1)} = \frac{\ln(\frac{x^2+1}{2x^2+1})}{\ln(\frac{x^3+1}{x^3-1})} = \frac{\ln(\frac{1}{2}+o(1))}{\ln(1+\frac{2}{x^3-1})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\ln(2)}{\frac{2}{x^3-1}} \sim -\frac{\ln(2)}{2}x^3$. Et ailleurs ? En 0 ce serait sûrement très intéressant, mais on a un gros problème : la fonction n'est pas définie au voisinage de 0 ! Du coup, tant pis, on arrête là.

Exercice 5 (**)

1. La fonction f_n ayant pour dérivée $f_n'(x) = 3x^2 + n$, qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n est strictement croissante. Elle admet pour limite $-\infty$ et $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$, donc est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, elle s'annule en une unique valeur.
2. On calcule bien sûr $f_n(-1) = -1-n+n = -1$ et $f_n(0) = n \geqslant 0$ pour constater en utilisant la croissance de la fonction f_n que $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$.
3. Comme toujours pour les suites implicites, on calcule $f_{n+1}(u_n) = u_n^3 + (n+1)u_n + n + 1 = f_n(u_n) + u_n + 1 = u_n + 1$ (puisque par définition $f_n(u_n) = 0$). Comme on vient de voir que $u_n \geqslant -1$, $f_{n+1}(u_n) \geqslant 0$, et en particulier $f_{n+1}(u_n) \geqslant f_{n+1}(u_{n+1})$. La fonction f_{n+1} étant croissante, on en déduit que $u_n \geqslant u_{n+1}$, la suite (u_n) est donc décroissante.
4. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par -1, elle converge nécessairement vers un réel l. Par ailleurs, on sait que $u_n^3 = -n(u_n+1)$. Si u_n convergeait vers un réel $l \neq -1$, on aurait une contradiction puisque le membre de gauche de cette égalité tendrait vers l^3 et celui de droite vers $+\infty$. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.
5. On sait déjà que $u_n = -1 + o(1)$ (c'est équivalent à la limite donnée à la question précédente), donc $\frac{u_n^3}{n} = \frac{-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Or, l'équation définissant u_n est équivalente à $u_n = -1 - \frac{u_n^3}{n}$, donc $u_n = -1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Pour obtenir le terme suivant, on reprend le calcul avec ce qu'on vient de prouver : $u_n^3 = \left(-1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^3 = -1 + \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ (le seul terme

restant dans le développement est celui de la forme $3a^2b$, avec $a = -1$ et $b = \frac{1}{n}$), donc $u_n = -1 - \frac{u_n^3}{n} = -1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

6. Eh bien allons-y, on reprend toujours les calculs dans le même ordre : $u_n^3 = \left(-1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^3 = -1 + \frac{3}{n} - \frac{9}{n^2} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (un triple produit de $(-1)^2$ par $\frac{3}{n^2}$, et un autre de $\frac{1}{n}$ au carré par -1), donc $u_n^3 = -1 + \frac{3}{n} - \frac{12}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, puis $u_n = -1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{12}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Plus que deux fois à refaire le même genre de calculs : $u_n^3 = \left(-1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{12}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^3 = -1 + \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n} - \frac{9}{n^2} + \frac{36}{n^3} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = -1 + \frac{3}{n} - \frac{12}{n^2} + \frac{37}{n^3}$, puis $u_n = -1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{12}{n^3} - \frac{37}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.
Un dernier pour la route : $u_n^3 = \left(-1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{12}{n^3} - \frac{37}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)^3 = -1 + \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n} - \frac{9}{n^2} + \frac{36}{n^3} - \frac{111}{n^4} - \frac{3}{n^2} - \frac{9}{n^4} - \frac{27}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) = -1 + \frac{3}{n} - \frac{12}{n^2} + \frac{37}{n^3} - \frac{147}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$, donc $u_n = -1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{12}{n^3} - \frac{37}{n^4} + \frac{147}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$.

Exercice 6 (* à **)

- On commence par écrire $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$ (c'est du cours) puis, en appliquant $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + o(u^4)$ (application de la formule du coupprs pour $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$) à $u = x + x^2 + x^3 + x^4$ (qui tend bien vers 0), $\sqrt{\frac{1}{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}(x+x^2+x^3+x^4) - \frac{1}{8}(x+x^2+x^3+x^4)^2 + \frac{1}{16}(x+x^2+x^3+x^4)^3 + \frac{5}{128}(x+x^2+x^3+x^4)^4 + o(x^4)$. Il ne reste plus qu'à tout développer en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 : $\sqrt{\frac{1}{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{16}x^4 + \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$, soit $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{45}{128}x^4 + o(x^4)$. On peut aussi gagner un peu de temps en appliquant directement la formule du cours pour $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, avant de remplacer les x par des $-x$.
- On sait que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$, il suffit donc d'appliquer le développement limité $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$ avec $u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6$ (un DL à l'ordre 3 sera suffisant car u est lui-même de l'ordre de grandeur de x^2). On ne garde bien sûr que les termes d'ordre inférieur ou égal à 6 pour obtenir $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right)^3 + o(x^6) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + \frac{1}{8}x^6 + o(x^6)$, soit $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^6)$.
- Attention, on fait un développement limité en 1 et pas en 0. Posons donc $h = x-1$, qui lui tendra vers 0 quand x tend vers 1 : $e^x = e^{1+h} = e \times e^h = e \times \left(1 + h + \frac{h}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + o(h^4)\right) =$

$e+eh+\frac{e}{2}h^2+\frac{e}{6}h^3+\frac{e}{24}h^4+o(h^4)$. On conclut en remplaçant h par $x-1$: $f(x) \underset{x\to 1}{=} e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e}{6}(x-1)^3+\frac{e}{24}(x-1)^4+o(x-1)^4$. Alternativement, on pouvait trouver très rapidement cette formule en appliquant directement la formule de Taylor-Young, toutes les dérivées de l'exponentielle prenant pour valeur e quand $x=1$.

- Attention au petit piège, la fonction a pour limite 2 en 0, il faut sortir un facteur 2 pour pouvoir appliquer la formule du DL de $\sqrt{1+u}$: $f(x)=\sqrt{3+\cos(x)}=\sqrt{4-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=2\sqrt{1-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}=2\left(1-\frac{x^2}{16}+o(x^2)\right)$ soit $f(x)=2-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$.
- C'est le même que le précédent, sans le petit piège, et à un ordre un peu plus élevé : $\sqrt{\cos(x)}=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{-x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{-x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+o(x^4)=1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{48}x^4-\frac{1}{32}x^4+o(x^4)$, soit $f(x)=1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{96}x^4+o(x^4)$.
- Plusieurs méthodes possibles ici. On peut partir de $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+o(x^2)$, et élever le tout au carré : $\frac{1}{(x-1)^2}=1+x^2+x^4+2x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^3+2x^4+2x^5+2x^5+o(x^5)$, soit $f(x)=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+o(x^5)$ (on peut deviner aisément ce que ça donnerait à l'ordre n, les plus courageux essaieront de le démontrer). Autre possibilité : écrire $f(x)=\frac{1}{1-2x+x^2}$, et utiliser le DL de $\frac{1}{1-u}$ pour trouver $\frac{1}{(x-1)^2}=1+(2x-x^2)+(2x-x^2)^2+(2x-x^2)^3+(2x-x^2)^4+(2x-x^2)^5+o(x^5)=1+2x-x^2+4x^2-4x^3+x^4+8x^3-12x^4+6x^5+16x^4-32x^5+32x^5+o(x^5)$, soit à nouveau $f(x)=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+o(x^5)$.
- On a déjà vu ce genre de calcul : il faut penser à sortir un facteur $\sqrt{2}$ pour appliquer le DL de $\sqrt{1+u}$, soit $\sqrt{x+2}=\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\right)$. On trouve donc $f(x)=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{32}x^2+\frac{\sqrt{2}}{128}x^3+o(x^3)$.
- Le calcul de DL d'une composée est ici doublé du petit piège habituel puisque la fonction a pour limite $\ln(2)$: $1+e^x=2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)=2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{48}+o(x^4)\right)$, donc $\ln(1+e^x)=\ln(2)+\ln\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{48}+o(x^4)\right)$, on peut désormais appliquer le DL de $\ln(1+u)$ pour obtenir $\ln(1+e^x)=\ln(2)+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{48}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{48}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{48}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{48}\right)^4+o(x^4)=\ln(2)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{48}x^4-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{32}x^4-\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{64}x^4+o(x^4)$, soit $f(x)=\ln(2)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{192}x^4+o(x^4)$.
- Enfin un calcul très rapide : $\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5\,040}+o(x^7)$, soit $f(x)=1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{5\,040}x^6+o(x^6)$.
- On a déjà calculé le DL de $\sqrt{\cos(x)}$ un peu plus haut, la seule question qui se pose est concernant le $\cos(\sqrt{x})$. A-t-on le droit de se contenter de prendre le DL de $\cos(x)$ et remplacer

les x par des $\sqrt{x}$ en profitant du fait que la présence de puissances paires uniquement va faire disparaitre toutes les racines carrées ? Bien sûr que oui ! Le seul détail est que le DL ne sera évidemment valable qu'à droite de 0, puisque la fonction n'est pas définie quand $x < 0$. On écrira donc $\cos(\sqrt{x}) \underset{x\to 0^+}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{720}x^3+o(x^3)$. Il ne reste plus qu'à faire une addition pour trouver $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{24}x^2 - \frac{1}{720}x^3 + o(x^3)$.

- Une composée classique : $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^5}{120} + o(x^5)$, donc $e^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^4$ $+\frac{1}{120}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^5 + o(x^5) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$, soit $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$.
- Plusieurs possibilités ici. On peut faire le classique changement de variable $h = x - 2$, donc $x^4 = (2 + x - 2)^4 = 16\left(1 + \frac{h}{2}\right)^4 = 16\left(1 + 2h + \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^3 + o(h^3)\right) = 16 + 32h + 24h^2 + 8h^3 + o(h^3)$. Autrement dit, $f(x) \underset{x\to 2}{=} 16+32(x-2)+24(x-2)^2+2(x-2)^3+o(x-2)^3$. On n'a même pas eu besoin de formule du cours ici, puisqu'on développe simplement un polynôme, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton pour développer.
Deuxième méthode : appliquer la formule de Taylor-Young, les dérivées étant ici très faciles à calculer. En effet, $f(2) = 16$; $f'(2) = 4 \times 2^3 = 32$; $f''(2) = 12 \times 2^2 = 48$ et $f^{(3)}(2) = 24 \times 2 = 48$, donc $f(x) = 16 + 32(x - 2) + \frac{48}{2}(x - 2)^2 + \frac{48}{6}(x - 2)^3 + o(x - 2)^3$, ce qui donne bien le même DL que plus haut.
- Le plus normal est d'écrire la puissance sous forme exponentielle $f(x) = e^{x\ln(1+\sin(x))}$, avec $\ln(1+\sin(x)) = \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$. En fait, on s'est fatigués à aller jusqu'à l'ordre 4 pour rien puisqu'on va multiplier par x avant de mettre dans l'exponentielle : $x\ln(1 + \sin(x)) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$, donc $e^{x\ln(1+\sin(x))} = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4\right)^2 + o(x^4) = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$ (inutile d'aller plus loin que l'ordre 2 ici). On conclut : $f(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$.
- Pour un DL ailleurs qu'en 0 d'une fonction comme l'arctangente, le mieux est, de loin, d'appliquer la formule de Taylor-Young, surtout que l'ordre n'est pas très élevé. On sait que $f(x) = \frac{\pi}{4}$, $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, donc $f'(1) = \frac{1}{2}$, et $f''(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}$, donc $f''(1) = -\frac{1}{2}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $f(x)\lim\limits_{x\to 1}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{4}(x - 1)^2 + o(x - 1)^2$.
Si on tient vraiment à faire un changement de variables, mieux vaut le faire sur la dérivée $\frac{1}{1 + x^2}$ que sur l'arctangente elle-même car on ne saura pas vraiment quoi faire de $\arctan(1 + h)$. Allez, faisons le calcul : en posant $h = x - 1$, $\frac{1}{1 + (h + 1)^2} = \frac{1}{2 + 2h + h^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + h + \frac{1}{2}h^2} = \frac{1}{2}(1 - h + o(h)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}h + o(h)$. On primitive ensuite, en ajoutant bien sûr la constante $\frac{\pi}{4}$: $\arctan(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + o(h)$, qui est bien le DL trouvé plus haut.

- Ici, le changement de variable est non seulement conseillé mais même bienvenu sinon la racine carrée pose problème. Posons donc $h = x - 1$, soit $x = h + 1$, pour trouver $\sqrt{x} = \sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3)$, et $\ln(\sqrt{x}) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3)\right) = \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3\right) + o(h^3) = \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + \frac{1}{24}h^3 + o(h^3)$. On en déduit que $f(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + o(x-1)^3$. Tiens, c'est amusant, il semble y avoir une certaine régularité dans ce DL. Un hasard ? Pas du tout, on a en fait calculé beaucoup pour rien, on pouvait simplement dire que $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + (x-1))$, et appliquer le DL de $\ln(1+u)$ en 0.
- On procède simplement en deux temps, en faisant attention à sortir un facteur 2 de la racine : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$, donc $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)} = \sqrt{2} \times \sqrt{1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3 + o(x^3)} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3\right)\right.$
$\left. - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3\right)\right) + o(x^3) =$
$\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{64}x^3 - \frac{1}{128}x^2 + \frac{1}{256}x^3 + \frac{1}{1\ 024}x^3\right) + o(x^3)$, soit $f(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{5\sqrt{2}}{128}x^2 + \frac{21\sqrt{2}}{1\ 024}x^3 + o(x^3)$.
- Rien de bien difficile : $\cos(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^3)$, donc $\ln(\cos(3x)) = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$ (à cet ordre-là, on ne se fatigue pas trop).
- Un petit peu de trigonométrie n'est pas inutile ici, en l'occurence des formules d'addition. On pose $h = x - \frac{\pi}{3}$, donc $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(h) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(h) = \frac{1}{2}\cos(h) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(h) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{4\sqrt{3}}h^3 + o(h^3)$, soit $f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{=} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3$.
- Il n'est même pas évident à priori que cette fonction est définie en 0, ou plutôt prolongeable par continuité en 0. Rien ne nous empêche pour autant de tenter un développement limité, qui à première vue s'apparantera plutôt à un développement asymptotique. On peut écrire $\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} = \frac{1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^4)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + o(x^3)$. Notez que pour obtenir ce développement à l'ordre 3, il était nécessaire de partir d'un DL à l'ordre 5 du dénominateur. On fait pareil pour le deuxième inverse : $\frac{1}{\text{sh}(x)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^4)}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + o(x^3)$. En faisant la différence, on trouve très simplement $f(x) = \frac{x}{3} + o(x^3)$.
- Attention ici, il y a une petite difficulté : numérateur et dénominateur tendent tous deux vers 0 en 0, mais comme ils également tous deux équivalents à x, une simplification des DL va se produire pour donner une fonction qui se prolonge par continuité Toutefois, il faut anticiper cette simplification et faire initialement des DL à l'ordre 3 si on veut obtenir de l'ordre 2 pour f : $\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) \times$

$\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\right) = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^2+o(x^2)$, soit $f(x) = 1-x+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)$.

- Encore une composée assez classique, en n'oubliant pas de sortir un facteur $\ln(3)$ pour avoir quelque chose qui tend vers 0 : $\ln(2e^x+e^{-x} = \ln\left(2+2x+x^2+\frac{x^3}{3}+1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) = \ln\left(3+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right) = \ln(3)+\ln\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{18}x^3+o(x^3)\right) = \ln(3)+\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{18}x^3\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{18}x^3\right)^3+o(x^3) = \ln(3)+\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{81}x^3+o(x^3)$, soit $f(x) = \ln(3)+\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{81}x^3+o(x^3)$.
- Rien de spécial à signaler pour celui-là : $\frac{xe^{-x}}{1+2x} = (x-x^2+o(x^2))(1-2x+4x^2+o(x^2)) = x-x^2-2x^2+o(x^2)$, soit $f(x) = x-3x^2+o(x^2)$.
- On commence bien sûr par écrire $x^x = e^{x\ln(x)}$. Ensuite, le plus rapide est sûrement d'appliquer directement la formule de Taylor-Young, surtout que l'ordre n'est pas très élevé. On calcule $f(2) = 2^2 = 4$; puis $f'(x) = (\ln(x)+1)e^{x\ln(x)}$, donc $f'(2) = 4(1+\ln(2))$; et enfin $f''(x) = \frac{1}{x}e^{x\ln(x)}+(\ln(x)+1)^2e^{x\ln(x)}$, donc $f''(2) = 2+4(1+\ln(2))^2$. On en déduit que $f(x) \underset{x\to 2}{=} 4+4(1+\ln(2))(x-2)+(1+2(1+\ln(2))^2)(x-2)^2+o(x-2)^2$.
  Sinon, si on y tient vraiment, on fait le changement de variable $h = x-2$, donc $f(x) = e^{(2+h)\ln(2+h)} = e^{(2+h)(\ln(2)+\ln(1+\frac{h}{2}))} = e^{(2+h)(\ln(2)+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+o(h^2))} = e^{2\ln(2)+(1+\ln(2))h+\frac{1}{4}h^2+o(h^2)} = 4e^{(1+\ln(2))h+\frac{1}{4}h^2+o(h^2)} = 4\left(1+(1+\ln(2))h+\frac{1}{4}h^2+\frac{(1+\ln(2))^2}{2}h^2+o(h^2)\right)$, ce qui donne évidemment le même résultat que ci-dessus.
- Ce qui est dans l'arcsinus tend vers $\frac{1}{2}$ en 0, et en faire le développement limité ne pose pas de problème : $\frac{1+x}{2+x} = \frac{1+x}{2}\times\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$. Cherchons désormais le Dl d'arcsinus en $\frac{1}{2}$ pour pouvoir composer : $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $\arcsin'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, et enfin $\arcsin''(x) = \frac{-2x}{-2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, donc $\arcsin''(x) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$. On en déduit que $\arcsin(x) \underset{x\to\frac{1}{2}}{=} \frac{\pi}{6}+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+o\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$. Il ne reste plus que la dernière étape : $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{6}$ $+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}x^2\right)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}x^2\right)^2+o(x^2) = \frac{\pi}{6}+\frac{1}{2\sqrt{3}}x-\frac{1}{4\sqrt{3}}x^2+\frac{1}{24\sqrt{3}}x^2+o(x^2)$, soit $f(x) = \frac{\pi}{6}+\frac{1}{2\sqrt{3}}x-\frac{5}{24\sqrt{3}}x^2+o(x^2)$.
- On va écrire les composées l'une après l'autre : commençons par $\ln(\text{ch}(x))$ $= \ln\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+o(x^6)\right)$. On peut poser $u = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+o(x^6)$ et effectuer un DL à l'ordre 3 du ln (pas d'aller plus loin puisque u est équivalent à un multiple de x^2) : $\ln(1+u) = u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+o(u^3) = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{48}x^6+\frac{1}{24}x^6+o(x^6) = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+\frac{16}{720}x^6+o(x^6) = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{45}x^6+o(x^6)$. Il ne reste plus qu'à calculer la deuxième composée, en posant comme nouvelle variable u ce qu'on vient d'obtenir,

on peut à nouveau se contenter d'un DL à l'ordre 3 : $\text{ch}(\ln(\text{ch}(x))) = 1 + \frac{1}{2}u^2 + o(u^3) = 1 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6)$. La dernière étape est en fait très rapide dans ce calcul.

- Un calcul pour le coup assez classique. On sait que $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$ (voir le cours ou plus haut dans ce même exercice pour le détail du calcul), et $\sqrt[3]{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{\frac{1}{3} \times (\frac{1}{3} - 1)}{2}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)$, il reste donc à faire le produit : $f(x) = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4\right)\left(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4\right) + o(x^4) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{72}x^4 + o(x^4)$.
- Il ne faut pas se laisser effrayer par cet ordre délirant, il ne va pas évidemment pas rester grand chose. Par un changement e variable évident, on obtient $\cos(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{24}x^{12} + o(x^{17})$ (le terme suivant serait d'ordre 18), et $\text{ch}(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{24}x^{12} + o(x^{17})$, donc $\cos(x^3) + \text{ch}(x^3) - 2 = \frac{1}{12}x^{12} + o(x^{17})$. On aimerait pouvoir conclure directement, mais on se rend compte d'un léger problème : la racine carrée n'admet pas de DL en 0 puisqu'elle n'y est pas dérivable ! On peut quand même s'en sortir en trichotant un peu : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{12}x^12 + o(x^{17})} = \frac{1}{\sqrt{12}}x^6\sqrt{1 + o(x^5)} = \frac{1}{\sqrt{12}}x^6(1 + o(x^5)) = \frac{1}{\sqrt{12}}x^6 + o(x^{11})$. On a obtenu un DL à l'ordre 11 de notre fonction f en 0, mais ce n'est pas suffisant. En fait, on a déjà mieux : si on remonte les calculs, on a signalé que le premier terme négligé dans le DL de la fonction cosinus était de degré 18, mais ce dernier va se simplifier avec le terme opposé dans le DL du ch, le terme non nul suivant serait donc de degré 24. Autrement dit, on peut en fait écrire $\cos(x^3) + \text{ch}(x^3) - 2 = \frac{1}{12}x^{12} + o(x^{23})$, et donc $f(x) = \frac{1}{\sqrt{12}}x^6\sqrt{1 + o(x^{11})} = \frac{1}{\sqrt{12}}x^6 + o(x^{17})$ et on a obtenu exactement ce qui était demandé.

Exercice 7 (***)

La fonction f est somme de trois fonction définies et strictement décroissantes sur $]-1,1[$ (non, pas besoin de calculer de dérivée), donc est elle-même strictement décroissante sur $]-1,1[$. Elle y est donc bijective, et les calculs de limites évidents prouvent que $f(]-1,1[) = \mathbb{R}$. La réciproque g est donc définie au voisinage de $+\infty$. On va obtenir le développement demandé par étapes en exploitant bien sûr le fait que $f(g(x)) = x$:

- le théorème de la bijection assure que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -1$, ce qui prouve déjà que $g(x) \underset{x \to +\infty}{=} -1 + o(1)$.
- en notant $a = g(x) = f^{-1}(x)$, et $h = g(x) + 1 = a + 1$ (qui a donc une limite nulle quand x tend vers $+\infty$), on peut écrire $x = f(a) = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} = \frac{1}{h-2} + \frac{1}{h} + \frac{1}{h+1} \underset{h \to 0}{\sim} \frac{1}{h}$ (seul terme à ne pas avoir une limite finie), donc $h \sim \frac{1}{x}$, ce qui prouve que $g(x) = -1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
- on recommence en notant désormais $h = g(x) + 1 - \frac{1}{x} = a + 1 - \frac{1}{x}$ (qui tend « encore plus » vers 0 que précédemment), et on écrit $x = f(a) = \frac{1}{h - 2 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{h + \frac{1}{x}} + \frac{1}{h + 1 + \frac{1}{x}}$. Les deux termes extrêmes ont toujours des limites finies, égales à $-\frac{1}{2}$ et 1 respectivement, donc $x = \frac{1}{2} + o(1) + \frac{x}{hx + 1}$. Or, la variable hx a désormais elle-même une limite nulle par

construction, et on peut donc écrire $x = \frac{1}{2} + o(1) + x(1 - hx + o(hx))$ soit après simplification $hx^2 \sim \frac{1}{2}$ et donc $h \sim \frac{1}{2x^2}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $g(x) + 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc $g(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 8 (* à **)

- Puisque $\frac{1}{x}$ tend vers 0, on peut effectuer un développement limité : $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$, donc $x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ (on n'oublie pas de multiplier par x^2 également dans le o). En particulier, la limite demandée est égale à $\frac{1}{2}$.

- On commence par écrire la puissance sous forme exponentielle $e^{\frac{1}{x^2}\ln(\frac{\tan(x)}{x})}$. Puis on effectue un développement limité (normalement l'ordre 1 suffira) étape par étape. D'après le cours, $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, donc $\frac{\tan(x)}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^3)$. On peut alors composer sans problème par $\ln(1+u)$: $\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) + o(x^3) = \frac{x^2}{3} + o(x^2)$ (en fait, un équivalent suffit à partir de cette étape). On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right) = \frac{1}{3}$, puis que la limite recherchée vaut $e^{\frac{1}{3}}$.

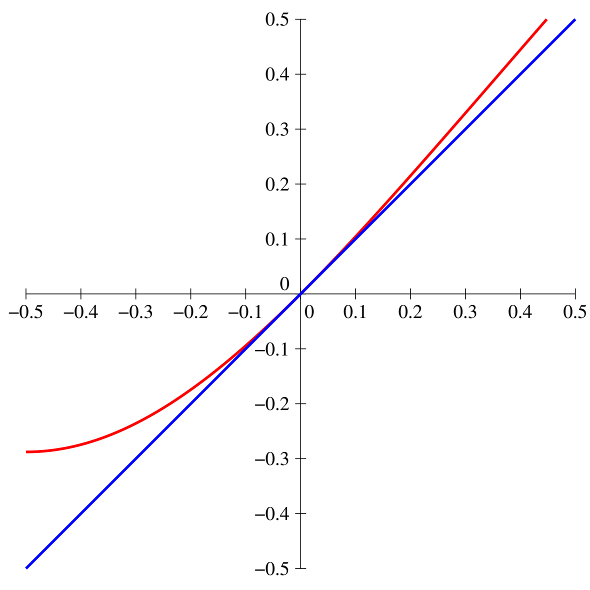
- Si on veut exploiter des DL, il faut une variable qui tende vers 0, ce qui incite à effectuer le changement de variable $h = x - 2$, autrement dit $x = h + 2$. On peut alors écrire $\frac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+3}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\sqrt{2(h+2)^2+1} - \sqrt{(h+2)^2+h+2+3}}{(h+2)^2 - 3(h+2) + 2}$ $= \frac{\sqrt{9+8h+2h^2} - \sqrt{9+5h+h^2}}{h+h^2}$. Le dénominateur de cette fraction est équivalent à h en 0, il suffit donc d'obtenir un équivalent du numérateur pour conclure, mais les deux racines carrées ayant la même limite (sinon il n'y aurait pas de forme indéterminée), on a besoin de deux termes au début du DL : $\sqrt{9+8h+2h^2} = 3\sqrt{1 + \frac{8}{9}h + o(h)} = 3\left(1 + \frac{4}{9}h + o(h)\right) = 3 + \frac{4}{3}h + o(h)$. De même, $\sqrt{9+5h+o(h)} = 3\sqrt{1 + \frac{5}{9}h + o(h)} = 3 + \frac{5}{6}h + o(h)$, donc $\sqrt{9+8h+2h^2} - \sqrt{9+5h+h^2} = 3 + \frac{4}{3}h - 3 - \frac{5}{6}h + o(h) \sim \frac{1}{2}h$. La limite recherchée est donc égale à $\frac{1}{2}$. On pouvait aussi s'en sortir sans le moindre calcul de DL, en utilisant très classiquement un produit par la quantité conjuguée (sans changement de variable !) dès le début du calcul.

- Pour faire un développement limité ici, il faut d'abord se ramener à 0. Pour cela, on factoriser par x^2 dans la racine carrée (on supposera $x \geqslant 0$) : $\sqrt{x^2+3x+2} - x = x\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - x = x\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1\right)$. Puisque $\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$ tend vers 0, on peut effectuer un développement limité (à l'ordre 1, ça suffira) de la parenthèse : $\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - 1 = 1 + \frac{3}{2x} - 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{3}{2x}$. On en déduit facilement que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} - x = \frac{3}{2}$. Notons au passage que le terme en $\frac{2}{x^2}$ n'intervient pas dans le calcul, on peut donc remplacer dans la racine carrée initiale le $+2$ par n'importe quelle autre constante sans changer la limite.

- Il suffit ici de faire un développement limité à l'ordre 2 du numérateur : $e^x - x - \cos(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$, donc la limite demandée est égale à 1.
- Écrivons simplement $f(x) = \frac{\mathrm{sh}(\mathrm{ch}(x))}{\mathrm{ch}(\mathrm{sh}(x))} = \frac{e^{\mathrm{ch}(x)} + e^{-\mathrm{ch}(x)}}{e^{\mathrm{sh}(x)} - e^{-\mathrm{sh}(x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\mathrm{ch}(x)}}{e^{\mathrm{sh}(x)}} = e^{\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)} = e^{e^{-x}}$. Un simple calcul de composée de limite donne alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
- Ce n'est pas exactement un développement limité qu'on va faire, mais on va les exploiter quand même : $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)} = \frac{\sin^3(x) - x^3}{x^3\sin^3(x)} \sim \frac{\sin^3(x) - x^3}{x^6}$. Reste à faire un DL à l'ordre 6 du numérateur : $\sin^3(x) - x^3 = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)^3 - x^3 = x^3 - \frac{1}{2}x^5 - x^3 + o(x^6) \sim -\frac{1}{2}x^5$. On en déduit que $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2x}$. En particulier, il n'y a pas de limite finie en 0.
- On passe bien sûr à l'exponentielle pour obtenir $e^{x^2\ln(\mathrm{ch}(\frac{1}{x}))}$. Puisque $\frac{1}{x}$ tens vers 0, on peut sûrement effectuer un développement limité, qu'on poussera jusqu'à l'ordre 2 pour anticiper le produit par x^2 : $\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc $\ln\left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sim \frac{1}{2x^2}$, ce donc on déduit que la limite recherchée vaut $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

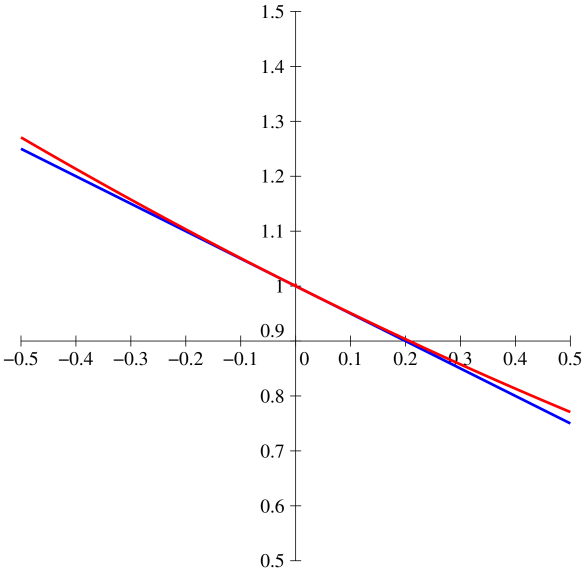
Exercice 9 (** à ***)

1. Écrivons le développement limité de f à l'ordre 3 en 0 (mieux vaut être prudent) : $\ln(1 + x + x^2) = x + x^2 - \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + \frac{1}{3}(x + x^2)^3 + o(x^3) = x + x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$. La courbe admet donc en 0 une tangente d'équation $y = x$, et le terme suivant du développement limité étant toujours positif au voisinage de 0, la courbe sera localement située au-dessus de sa tangente. Pour chaque figure, la courbe sera représentée en rouge et la tangente ou l'asymptote en bleu.

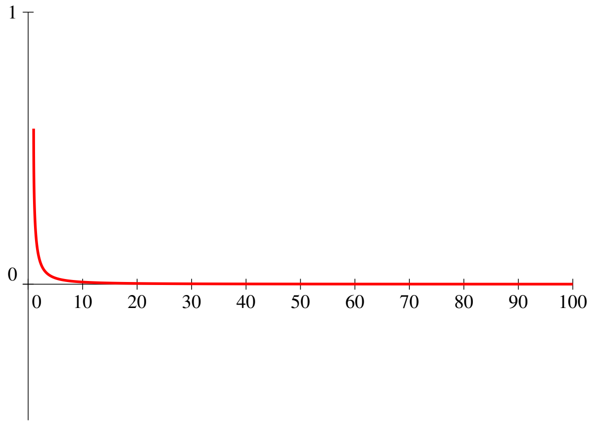


2. On est repartis pour un petit développement limité : $f(x) = \frac{x}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$ $= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$. La courbe

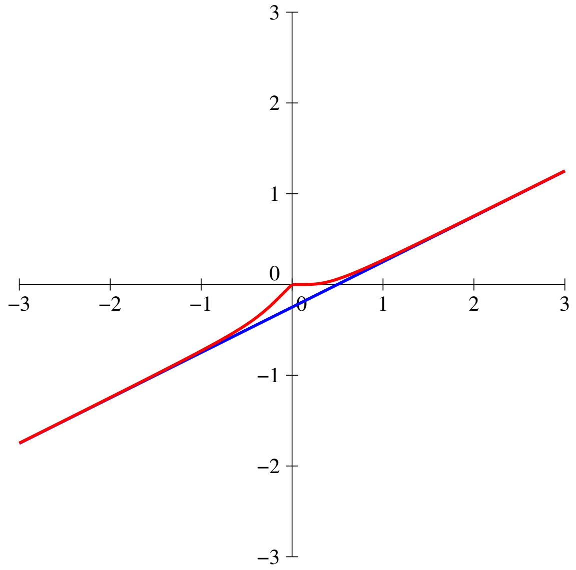
admet une tangente d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$, et elle est située localement au-dessus de sa tangente.



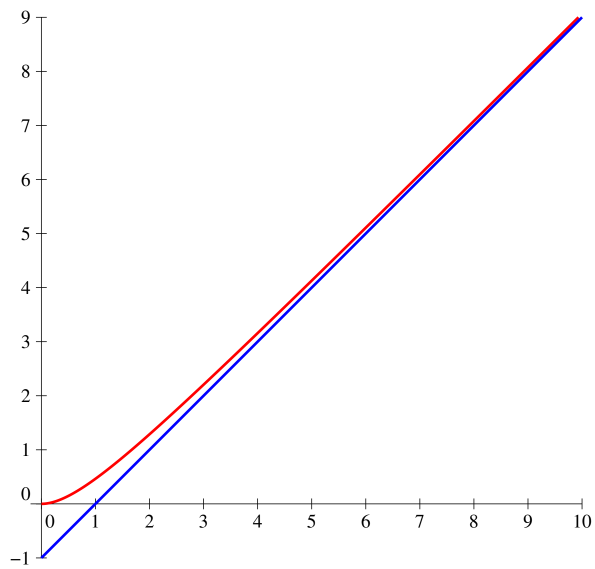
3. Il faut commencer par se ramener à un calcul en 0 en mettant $\sqrt{x}$ en facteur partout : $f(x) = \sqrt{x}\left(2 - \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$. Posons $X = \frac{1}{x}$ pour clarifier le calcul : $\sqrt{X}f(x) = 2-(1+X)^{\frac{1}{2}}-(1-X)^{\frac{1}{2}} = 2-1-\frac{1}{2}X+\frac{1}{8}X^2-1+\frac{1}{2}X+\frac{1}{8}X^2+o(X^2) = \frac{1}{4}X^2+o(X^2)$, donc $f(x) \sim \frac{1}{4}X\sqrt{X} \sim \frac{1}{4x\sqrt{x}}$. En particulier, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, et la courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.



4. Posons donc $X = \frac{1}{x}$, alors $f(x) = \frac{1}{X} \times \frac{1}{1+e^X}$, soit $Xf(x) = \frac{1}{2+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X^3+o(X^3)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}X+\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{12}X^3+o(X^3)} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}X^2-\frac{1}{12}X^3+\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{4}X^3-\frac{1}{8}X^3+o(X^3)\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}X+\frac{1}{48}X^3+o(X^3)$. On en déduit que $f(x) = \frac{1}{2X}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48}X^2+o(X^2) = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{48x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. En particulier, la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, et elle est localement située au-dessus de cette asymptote.

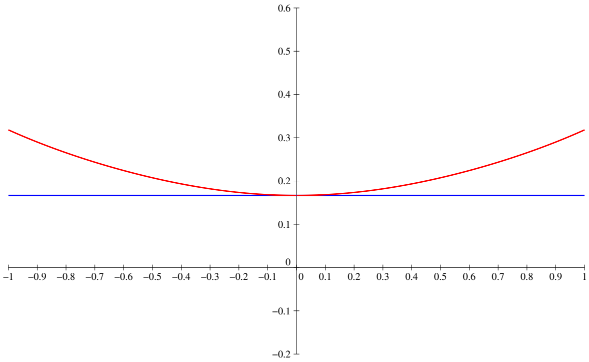


5. Ce qui se trouve dans l'arctangente a une limite nulle, on doit pouvoir s'arranger pour faire un développement limité. Commençons par poser comme d'habitude $X = \dfrac{1}{x}$, et écrivons $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{X}{1+X} = X(1-X+X^2)+o(X^2) = X-X^2+X^3+o(X^3)$. En composant par l'arctangente, $\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = X - X^2 + X^3 - \dfrac{X^3}{3} + o(X^3) = X - X^2 + \dfrac{2}{3}X^3 + o(X^3)$, donc $f(x) = \dfrac{1}{X} - 1 + \dfrac{2}{3}X + o(X) = x - 1 + \dfrac{2}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La courbe admet donc en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x - 1$, et elle est localement située au-dessus de l'asymptote.

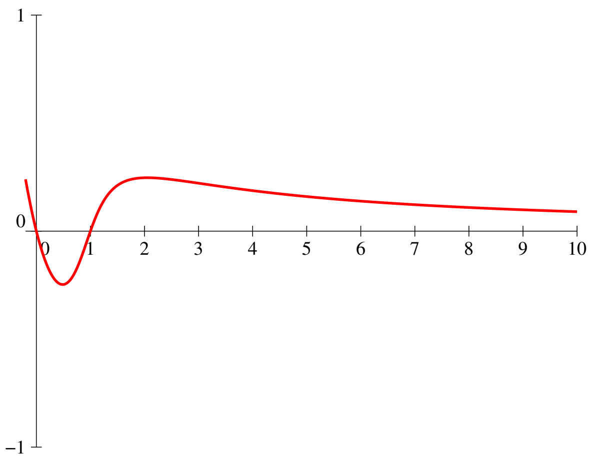


6. Il ne faut pas avoir peur, et surtout pousser les DL suffisamment loin dès le départ pour avoir les informations souhaitées (dans la correction, je mets le degré minimal nécessaire pour chaque DL, mais au brouillon, soit on va directement très loin, soit on fait plusieurs essais) : $\dfrac{\arctan(x)}{\sin^3(x)} = \dfrac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)}{(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040} + o(x^8))^3} = \dfrac{x(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^5))}{x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{40} + \frac{x^7}{12} + o(x^8)} = \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{120} + o(x^5)} = \dfrac{1}{x^2}\left(1 - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{5}x^4 + o(x^5)\right)\left(1 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{13}{120}x^4 + \dfrac{1}{4}x^4 + o(x^5)\right) =$

$\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{13}{120}x^4+\frac{1}{4}x^4+o(x^4)\right)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}+\frac{7}{120}x^2+o(x^2)$. Ouf, il ne reste plus qu'à conclure que $f(x)=\frac{1}{6}+\frac{7}{120}x^2+o(x^2)$, la fonction a donc pour limite $\frac{1}{6}$ en 0, y admet une tangente horizontale, et sa courbe est située localement au-dessus de cette tangente.

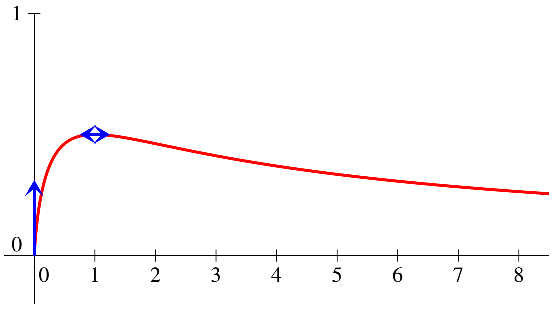


7. Ce n'est pas si compliqué que ça. Posons $g(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$, et G une primitive de g (par exemple celle qui s'annule en 0, la fonction g étant définie sur $\mathbb{R}$). On peut affirmer que $f(x)=G(x^2)-G(x)$. Commençons par écrire un développement asymptotique de $g(t)$ quand t tend vers $+\infty$, en posant comme toujours $T=\frac{1}{t}$: $g(t)=\frac{1}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^4}+1}}=\frac{T^2}{\sqrt{1+T^4}}=\frac{T^2}{1+\frac{1}{2}T^4-\frac{1}{8}T^8+o(T^8)}=T^2\left(1-\frac{1}{2}T^4+\frac{1}{8}T^8+\frac{1}{4}T^8+o(T^8)\right)=T^2-\frac{1}{2}T^6+\frac{3}{8}T^{10}+o(T^{10})$, soit $g(t)=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2t^6}+\frac{3}{8t^{10}}+o\left(\frac{1}{t^{10}}\right)$. On peut maintenant écrire $G(t)=-\frac{1}{t}+\frac{1}{10t^5}-\frac{1}{24t^9}+o\left(\frac{1}{t^9}\right)$, puis $f(x)=G(x^2)-G(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{10x^5}+o\left(\frac{1}{x^5}\right)$.

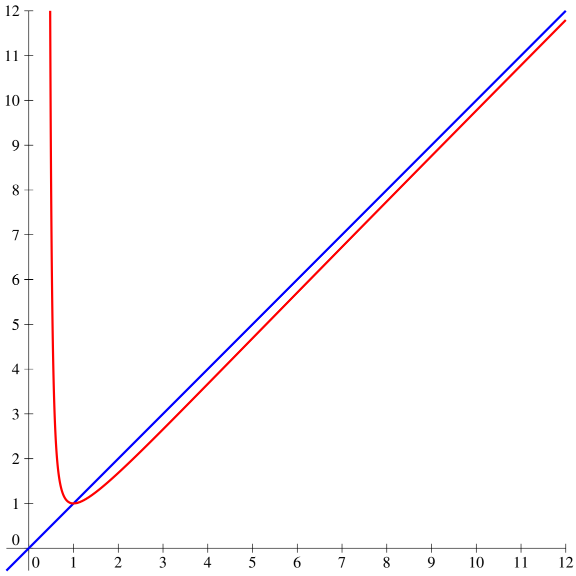


8. Commençons par préciser que $\mathcal{D}_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$. Il y a donc trois endroits où on peut étudier le comportement local de f. Commençons par regarder ce qui se passe en 0 : par croissance comparée, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$, donc on peut prolonger f par continuité en posant $f(0)=0$. On ne peut évidemment pas faire de développement limité en 0, pour étudier la dérivabilité éventuelle on va donc tenter d'utiliser le taux d'accroissement. En 0, $\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln(x)}{x^2-1}$ a pour limite $+\infty$, donc f admet une tangente verticale en 0 et n'y est pas dérivable. En fait, à défaut de développement limité, les plus curieux feront un développement asymptotique :

$f(x) = -x\ln(x) \times \dfrac{1}{1-x^2} = -x\ln(x)(1+x^2+o(x^2)) = -x\ln(x) + x^3\ln(x) + o(x^3\ln(x))$. Bon, en l'occurence, ça n'a aucun intérêt. En $+\infty$, par contre, c'est un peu pareil : $f(x) \sim \dfrac{\ln(x)}{x}$ (ce qui permet d'obtenir facilement l'existence d'une asymptote horizontale coïncidant avec l'axe des abscisses), et $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\ln(x)}{x}\left(1+\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x^3} + o\left(\dfrac{\ln(x)}{x^3}\right)$. Là encore, ce n'est pas palpitant. Passons maintenant à ce qui se passe en 1. On peut alors poser $x = 1+h$, avec h qui tend vers 0, pour obtenir $f(1+h) = \dfrac{(1+h)\ln(1+h)}{(1+h)^2-1} = \dfrac{(1+h)(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3))}{h(2+h)} = \dfrac{(1+h)(1-\frac{1}{2}h+\frac{1}{3}h^2+o(h^2))}{2+h} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-\frac{1}{2}h+\frac{1}{3}h^2+h-\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{1+\frac{1}{2}h} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}h-\dfrac{1}{6}h^2+o(h^2)\right)\left(1-\dfrac{1}{2}h+\dfrac{1}{4}h^2+o(h^2)\right)$
$= \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}h-\dfrac{1}{6}h^2-\dfrac{1}{2}h-\dfrac{1}{4}h^2+\dfrac{1}{4}h^2+o(h^2)\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{12}h^2+o(h^2)$. La fonction f est donc prolongeable en 1 en posant $f(1) = \dfrac{1}{2}$, elle y admet une tangente horizontale, et sa courbe est localement située en-dessous de cette tangente. On aimerait pouvoir étudier les variations de la fonction pour justifier l'allure globale de la courbe ci-dessous, mais la dérivée est franchement moche, donc on s'en abstiendra.



9. Commençons par écrire sous forme exponentielle $f(x) = e^{(1-\frac{1}{x^2})\ln(x)}$, pour en déduire que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+*}$. En 0, c'est très rapide, ce qui est dans l'exponentielle est équivalent à $-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$, qui a pour limite $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Concentrons-nous plutôt sur ce qui se passe en $+\infty$: $f(x) = e^{\ln(x)-\frac{\ln(x)}{x^2}} = \dfrac{x}{e^{\frac{\ln(x)}{x^2}}} = \dfrac{x}{1+\frac{\ln(x)}{x^2}+\frac{\ln^2(x)}{2x^4}+o(\frac{\ln^2(x)}{x^4})}$
$= x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}-\dfrac{\ln^2(x)}{2x^4}+\dfrac{\ln^2(x)}{x^4}+o\left(\dfrac{\ln^2(x)}{x^4}\right)\right) = x-\dfrac{\ln(x)}{x}+\dfrac{\ln^2(x)}{2x^3}+o(\frac{\ln^2(x)}{x^3})$. On est dans le domaine des développements asymptotiques ici plus que dans celui des développements limités, mais les informations qu'on peut en tirer sont les mêmes : la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe, et celle-ci est localement en-dessous de son asymptote. Là encore, l'étude des variations ne mènerait pas très loin, voici l'allure de la courbe :



Exercice 10 (***)

Comme toujours pour les suites adjacentes, trois points à vérifier. Commençons par le plus facile : $v_n - u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ tend certainement vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ensuite, $u_{n+1} - u_n = n+1 - \sum_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{1}{k}\right) - n + \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0$ puisqu'un cosinus peut difficilement être plus grand que 1. La suite (u_n) est donc croissante. Reste le dernier point, pour lequel, vous vous en doutez, on va recourir à un développement limité : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \cos\left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) + \sin\left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \cos\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque $v_{n+1} - v_n$ est équivalente à une suite négative, elle est forcément elle-même négative à partir d'un certain rang. Cela suffit à prouver que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite (mais ne me demandez pas quoi, je n'en sais rien !).

Exercice 11 (**)

1. Un peu de révisions sur les calculs d'intégrale ne peut jamais faire de mal : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, dx = \frac{\pi}{4}$, puis $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx = [-\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2}$. Enfin, on n'oublie pas que $\tan' = 1 + \tan^2$, et donc que $\tan^2$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto \tan(x) - x$ pour calculer $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)\, dx = [\tan(x) - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$.
2. On regroupe les deux intégrales pour écrire $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)(1 + \tan^2(x))\, dx$ et on reconnait une forme $u'u^n$ qui est (à un facteur près) la dérivée de u^{n+1}, donc $I_n + I_{n+2} =$

$\left[\dfrac{\tan^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{n+1}$. Le sintégrales de la suite étant toutes positives (on intègre une fonction positive), on en déduit en particulier que $0 \leqslant I_n \leqslant I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$, ce qui suffit à prouver en appliquant le théorème des gendarmes que la suite (I_n) converge vers 0.

3. On va effectuer une IPP en posant $u(x) = \tan^n(x)$ qu'on va dériver sous la forme $u'(x) = n\tan^{n-1}(x)\tan'(x) = \dfrac{n\tan^{n-1}(x)}{\cos^2(x)}$, et $v'(x) = \cos(2x)$ qu'on peut intégrer sous la forme $v(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x} = \sin(x)\cos(x)$ (si on n'a pas complètement oublié ses formules de duplication). On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\tan^n(x)\,dx = [\sin(x)\cos(x)\tan^n(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} n\tan^{n-1}(x)\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1^n - n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(x)\,dx = \frac{1}{2} - nI_n$.

4. Sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a $0 \leqslant \cos(2x) \leqslant 1$, donc en intégrant, on obtient facilement $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\tan^n(x)\,dx \leqslant I_n$, ce qui prouve que notre intégrale tend vers 0 (toujours le théorème des gendarmes) et donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

Exercice 12 (***)

1. Posons $f(x) = \tan(x) - x$, la fonction f est définie et dérivable sur chacun des intervalles de la forme $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. Sa dérivée $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$ étant toujours positive, f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles, et a des limites infinies aux bornes de l'intervalle, donc elle est bijective de $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur chacun des intervalles étudiés.
2. Par définition, $u_n \in \left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$, ce qui suffit à prouver via le théorème des gendarmes que $\lim u_n = +\infty$. De plus $1 - \dfrac{1}{2n} \leqslant \dfrac{u_n}{n\pi} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2n}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n\pi} = 1$, ce qui prouve que $u_n \sim n\pi$.
3. Par définition, $\tan(u_n) = u_n$, donc $\arctan(u_n) = \arctan(\tan(u_n))$, ce qui correspond exactement à l'angle appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ congru à u_n modulo π. Or, $u_n - n\pi$ convient (c'est toujours l'encadrement de u_n exploité dans la question précédente qui sert ici), donc $\arctan(u_n) = u_n - n\pi$. Or, $\lim\arctan(u_n) = \dfrac{\pi}{2}$, donc $u_n - n\pi = \dfrac{\pi}{2} + o(1)$, et $u_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + o(1)$.
4. On aimerait faire un devéloppement limité de $\arctan(u_n)$ mais on ne peut pas à cause de la limite infinie. Pas grave, on peut se ramener en 0 en exploitant la formule $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, valable pour tout réel strictement positif (on peut la démontrer de plein de façon, par exemple en posant $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$, en calculant $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$ pour constater que f est constante, puis en vérifiant que $f(1) = 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$). On peut donc écrire $u_n - n\pi = \arctan(u_n) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{n\pi}\times\dfrac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}\right)$
$= \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{n\pi}\left(1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2\pi n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On recommence : $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{2\pi^2 n^3} + o(\frac{1}{n^3})}$

$= \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{2\pi^2 n^3} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{\pi^2 n^3} - \frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$= \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + \frac{1}{4n^3} + \frac{1}{\pi^2 n^3} - \frac{1}{8n^4} - \frac{1}{3\pi^2 n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

On met tout ça dans l'arctangente en prenant en compte le terme suivant en $-\frac{1}{3}u^3$:

$\arctan\left(\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + \frac{1}{4n^3} + \frac{1}{\pi^2 n^3} - \frac{1}{8n^4} - \frac{1}{3\pi^2 n^4} - \frac{1}{3\pi^3 n^3} + \frac{1}{2\pi^3 n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

Et on conclut : $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{3\pi^3}\right)\frac{1}{n^3} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3\pi^2} - \frac{1}{2\pi^3}\right)\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. C'est tellement beau qu'on a même obtenu un terme de plus que ce qui était demandé par l'énoncé !

Exercice 13 (***)

1. La fonction f est définie si et seulement si ce qui se trouve à l'intérieur de la valeur absolue est strictement positif, donc défini (il faut supprimer la valeur interdite 1) et différent de 0 (il faut enlever -1). Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Ce domaine est symétrique par rapport à 0, et $f(-x) = (x^2 - 1)\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = -(x^2 - 1)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, donc la fonction f est impaire.
2. Au voisinage de 0, $1 + x$ et $1 - x$ sont tous les deux positifs, et on peut même séparer le quotient pour écrire $f(x) = (x^2 - 1)(\ln(1+x) - \ln(1-x))$. On sait très bien que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$, et donc que $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$, dont on déduit que $\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$, puis que $f(x) = 2x^3 - 2x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4) = -2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)$. Puisque f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle y est dérivable, et l'équation de sa tangente est $y = -2x$. De plus, on a $f(x) + 2x \sim \frac{4}{3}x^3$, donc $f(x) + 2x$ est positif à droite de 0 et négatif à gauche de 0 (en restant au voisinage de 0, bien entendu), et la courbe sera en-dessous de sa tangente à gauche de 0, et au-dessus à droite.
3. (a) En constatant que $1 + \frac{2X}{1-X} = \frac{1+X}{1-X}$, il s'agit au signe près du développement limité qu'on a déjà calculé, pas besoin de se fatiguer donc : $(1 - X^2)\ln\left(1 + \frac{2X}{1-X}\right) = 2X - \frac{4}{3}X^3 + o(X^3)$.

   (b) Posons donc $X = \frac{1}{x}$, et calculons $f(x) = \left(\frac{1}{X^2} - 1\right)\ln\left|\frac{1 + \frac{1}{X}}{1 - \frac{1}{X}}\right|$, soit $X^2 f(x) = (1 - X^2)\ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right)$ (puisqu'au voisinage de 0, $|X - 1| = 1 - X$), ce qui est exactement ce dont on vient de calculer un DL en 0 à la question précédente. On peut donc immédiatement affirmer (en divisant tout par X^2) que $f(x) = \frac{2}{X} - \frac{4}{3}X + o(X)$, soit $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 2x - \frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

(c) Oui, la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x$, et comme $f(x) - 2x \sim -\frac{4}{3x} < 0$ au voinage de $+\infty$, la courbe sera en-dessous de son asymptote quand x tend vers $+\infty$.

(d) On peut constater que le même calcul reste valable tel quel, ou utiliser l'imparité de la fonction f : la courbe admet la même asymptote oblique d'équation $y = 2x$ en $-\infty$, mais cette fois la courbe sera localement au-dessus de cette asymptote.

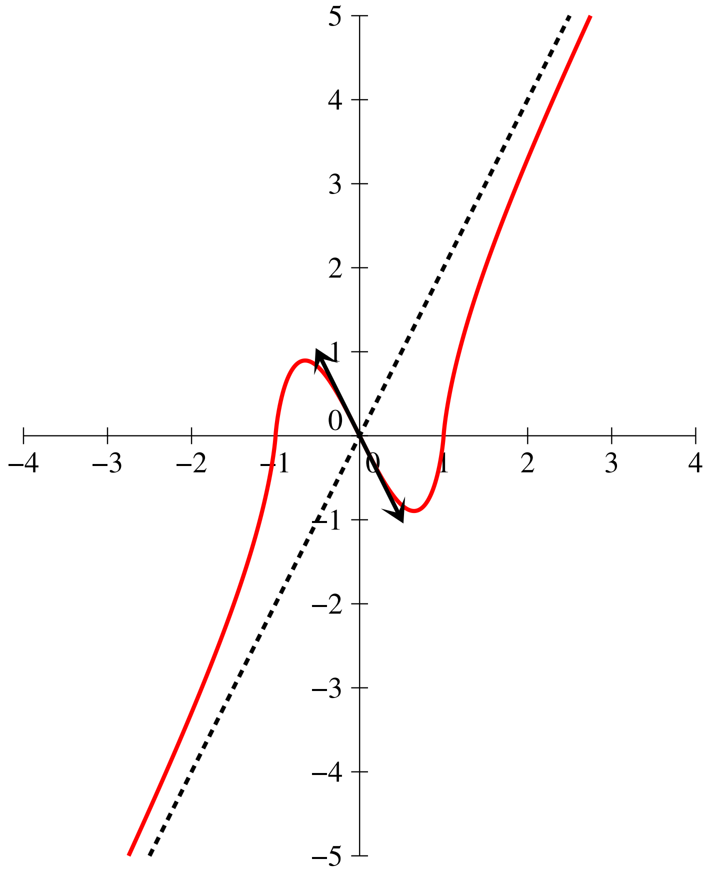
4. On peut toujours écrire $f(x) = (x^2 - 1)\ln|1 + x| - (x^2 - 1)\ln|1 - x|$, et le premier terme de cette différence a certainement une limite nulle en 1. Reste donc à gérer le second : on sait que $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ (croissance comparée classique), donc $\lim_{x\to 1}(x-1)\ln|1-x| = 0$ (la valeur absolue ne change rien, si ce n'est éventuellement le signe du calcul), et $\lim_{x\to 1}(x^2-1)\ln|1-x| = 0$ (on se contente de multiplier par $x+1$ la limite précédente). La fonction f est donc prolongeable par continuité en 1, en posant $f(1) = 0$. Pour savoir si ce prolongement est dérivable, on calcule le taux d'accroissement $\tau_1(h) = \frac{f(1+h)}{h} = \frac{((1+h)^2 - 1)}{h}\ln\left|\frac{2+h}{h}\right| = (2+h)\ln\left|1 + \frac{2}{h}\right|$. Il n'y a même pas de forme indéterminée ici : $\lim_{h\to 0}\tau_1(h) = +\infty$, donc la fonction prolongée n'est pas dérivable en 1 (la courbe y admettra une tangente verticale).

5. En utilisant le résultat donné dans l'énoncé, $f'(x) = 2x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - (x^2-1) \times \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = 2x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - (x^2-1) \times \frac{2}{1-x^2} = 2x\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x}\right) = 2xg(x)$.

6. Dérivons donc à son tour la fonction g (en reprenant une partie du calcul de dérivée de la question précédente) : $g'(x) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 + 1 - x^2}{x^2(1-x^2)} = \frac{x^2+1}{x^2(1-x^2)}$. Cette dérivée est du signe de $1 - x^2$, donc positive sur tout l'intervalle $]0, 1[$ et négative sur $]1, +\infty[$. Pour ce dernier intervalle, on a $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (aucune forme indéterminée ici, ce qui est dans le ln tendant vers 1), donc g est toujours positive sur $]1, +\infty[$ (même pas besoin de calculer l'autre limite). Par contre, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ (encore une fois, on a un ln qui a une limite nulle), mais $\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$ (toujours pas de forme indéterminée !). La fonction g étant strictement croissante sur $]0, 1[$, elle est bijective de cet intervalle vers $\mathbb{R}$, et en particulier s'annule exactement une fois entre 0 et 1. On calcule donc $g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2 < 0$ (tout le monde sait bien que $\ln(3) \simeq 1.1 < 2$), et $g\left(\frac{3}{4}\right) = \ln(7) - \frac{4}{3}$. Le signe est un peu moins flagrant, mais on peut dire par exemple que $\ln(7) > \ln(6) = \ln(3) + \ln(2) \simeq 1.8 > \frac{4}{3}$ pour justifier la positivité de cette valeur. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule donc sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$. Comme on a vu plus haut que f' était du même signe que g (quand $x > 0$ du moins), on peut dresser le tableau de variations complet suivant (en exploitant la parité et les calculs effectués précédemment) :

x	$-\infty$	-1	$-\alpha$	0	α	1	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	0 ↗	$\simeq 0.9$ ↘	0 ↘	$\simeq -0.9$ ↗	0 ↗	$+\infty$

7. On n'oublie bien sûr pas l'asymptote, la tangente en 0 et leurs positions relatives par rapport à la courbe :



Exercice 14 (**)

1. La fonction arctan étant impaire, f est paire (le numérateur est impair, le dénominateur aussi). La fonction f est par ailleurs définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Le cours nous dit que $\arctan(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ au voisinage de 0, donc $f(x) = \dfrac{1}{x}(1 + x^2)\left(x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right) = \dfrac{1}{x}\left(x + \dfrac{2}{3}x^3 + o(x^4)\right) = 1 + \dfrac{2}{3}x^2 + o(x^3)$.
3. Puisque f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle y est dérivable après avoir été prolongée par continuité en posant $f(0) = 1$. De plus, $f'(0) = 0$, ce qui n'est évidemment guère surprenant pour une fonction paire. Enfin, $f(x) - 1 \sim \dfrac{2}{3}x^2 > 0$, donc la courbe sera au-dessus de sa tangente horizontale au voisinage de 0.
4. C'est hyper classique, on pose par exemple $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$, g est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$, donc g est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Il suffit alors de calculer $g(1) = 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$ pour conclure.
5. Commençons comme d'habitude par poser $X = \dfrac{1}{x}$ pour calculer $f(x) = \dfrac{(\frac{1}{X^2} + 1)\arctan(\frac{1}{X})}{\frac{1}{X}} = \dfrac{(1 + X^2)(\frac{\pi}{2} - \arctan(X))}{X}$, soit $Xf(x) = (1 + X^2)\left(\dfrac{\pi}{2} - X + \dfrac{1}{3}X^3 + o(X^4)\right) = \dfrac{\pi}{2} - X + \dfrac{\pi}{2}X^2 - \dfrac{2}{3}X^3 + o(X^3)$, dont on déduit que $f(x) = \dfrac{\pi}{2}x - 1 + \dfrac{\pi}{2x} - \dfrac{2}{3x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. On observe

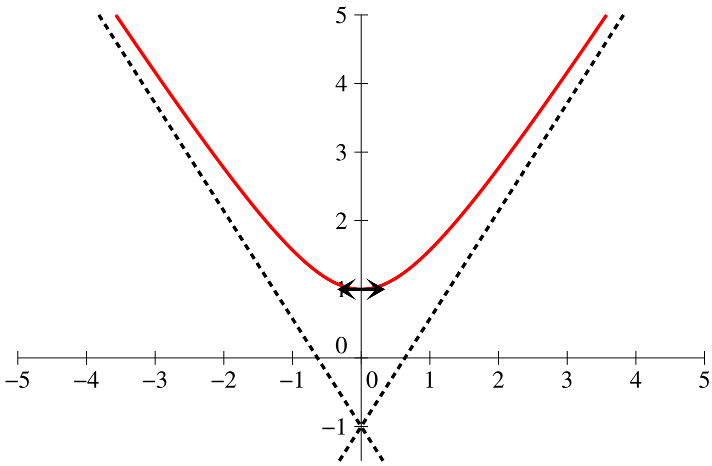
bien la présence d'une asymptote oblique d'équation $y = \frac{\pi}{2}x - 1$, et $f(x)?\left(\frac{\pi}{2}x - 1\right) \sim \frac{\pi}{2x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, la courbe de f sera donc au-dessus de son asymptote dans un tel voisinage. En $-\infty$, le calcul précédent n'est plus directement valable car la formule de la question précédente ne marche que pour des valeurs strictement positives de x, mais on peut simplement utiliser la parité de f : on aura une asymptote oblique d'équation $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$, et la courbe sera également au-dessus de cette asymptote sur un voisinage de $-\infty$.

6. La fonction h est définie et dérivable sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, et $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-1)^2-(x^2+1)^2}{(x^2+1)(x^2-1)^2} = -\frac{4x^2}{(x^2+1)(x^2-1)^2}$, qui est toujours négatif. Par ailleurs, $h(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = +\infty$ (calculs sans difficulté, et d'ailleurs inutile si on ne veut que le signe de la fonction h), et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$. On peut donc écrire le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
h	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$

7. Caculons donc $f'(x) = \frac{2x^2\arctan(x) + x - (x^2+1)\arctan(x)}{x^2} = \frac{(x^2-1)\arctan(x) + x}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}h(x)$. Comme $x^2 - 1$ est toujours du même signe que $h(x)$, on en déduit que f' est toujours positive, et donc que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Bien entendu, par parité de f, cette dernière sera décroissante sur $]-\infty, 0[$.

8. On n'oublie bien sûr pas les belles asymptotes :



Exercice 15 (**)

1. La fonction f définie par $f(x) = e^x + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions croissantes). Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ (limites évidentes à calculer). L'équation $f(x) = n$ admet donc une unique solution u_n pour tout entier n. De plus, $f(0) = 1$, donc $u_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant 1$.

2. La fonction f étant croissante, sa réciproque f^{-1} aussi. Comme $u_n = f^{-1}(n)$, la suite (u_n) est donc croissante. De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ (théorème de la bijection) donc $\lim u_n = +\infty$.

3. Par définition, $e^{u_n}+u_n=n$, avec $u_n=o(e^{u_n})$ à cause de la limite infinie, donc $e^{u_n}\sim n$. On ne peut hélas pas composer cet équivalent par la fonction ln, mais on peut écrire $u_n=\ln(e^{u_n})=\ln(n+o(n))=\ln(n(1+o(1)))=\ln(n)+\ln(1+o(1))\sim\ln(n)$ puisque $\lim\ln(1+o(1))=0$.
4. Même calcul ou presque que ci-dessus : $e^{u_n}=n-u_n$ donc $u_n=\ln(n-u_n)=\ln\left(n\left(1-\dfrac{u_n}{n}\right)\right)=\ln(n)+\ln\left(1-\dfrac{u_n}{n}\right)$, donc $u_n=\ln(n)+\ln\left(1-\dfrac{\ln(n)}{n}+o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$. On peut alors appliquer le DL à l'ordre 1 de la fonction ln (ce qui se trouve dans le ln est bien de la forme $1+u$ avec u qui tend vers 0) pour obtenir $u_n=\ln(n)-\dfrac{\ln(n)}{n}+o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$. On recommence pour obtenir un terme de plus à l'aide d'un DL à l'ordre 2 : $u_n=\ln(n)+\ln\left(1-\dfrac{\ln(n)}{n}+\dfrac{\ln(n)}{n^2}+o\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)\right)=\ln(n)-\dfrac{\ln(n)}{n}+\dfrac{\ln(n)}{n^2}-\dfrac{\ln^2(n)}{2n^2}+o\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)=\ln(n)-\dfrac{\ln(n)}{n}-\dfrac{\ln^2(n)}{2n^2}+\dfrac{\ln(n)}{n^2}+o\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$. Ce développement est un peu particulier dans la mesure où le terme ajouté n'a pas le même ordre que le suivant : $\dfrac{\ln(n)}{n^2}=o\left(\dfrac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$ mais on a bien gardé tous les termes à conserver (le double produit serait en $\dfrac{\ln^2(n)}{n^3}$ qui est négligeable par rapport à ce qu'on a mis dans notre o).

Problème 1 (***)

1. (a) Le trinôme $1+x+x^2$ ayant un discriminant strictement négatif, il est positif sur $\mathbb{R}$. La seule valeur interdite est donc 0, à cause du $\dfrac{1}{x}$ dans l'exponentielle, et $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}^*$.

   (b) La fonction g est certainement dérivable sur son domaine de définition (ce qui est sous la racine ne s'annule jamais), et $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x+x^2}+e^{\frac{1}{x}}\times\dfrac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}}=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2\sqrt{1+x+x^2}}(x^2(2x+1)-2(1+x+x^2))=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2\sqrt{1+x+x^2}}(2x^3-x^2-2x-2)$.

   (c) La dérivée g' est du signe de $h(x)=2x^3-x^2-2x-2$. On calcule $h'(x)=6x^2-2x-2=2(3x^2-x-1)$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta=13$, et s'annule donc pour $x_1=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$. Le tableau de variations de la fonction h ressemblera donc à ceci :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
h			$h(x_1)$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$h(x_2)$		

   Pour déterminer le nombre de valeurs annulant h, il faut hélas être capable de donner le signe de $h(x_1)$. Utilisons le fait que $h'(x_1)=0$, donc $3x_1^2=x_1+1$, pour en déduire que $x_1^3=\dfrac{x_1^2+x_1}{3}=\dfrac{4}{9}x_1+\dfrac{1}{9}$. On en déduit que $h(x_1)=2x_1^3-x_1^2-2x_1-2=\dfrac{8}{9}x_1+\dfrac{2}{9}-\dfrac{1}{3}x_1-\dfrac{1}{3}-2x_1-2=-\dfrac{13}{9}x_1-\dfrac{19}{9}$. Le nombre x_1 étant compris entre -1 et 0 (puisque $3<\sqrt{13}<4$), on en déduit que $h(x_1)<0$, ce qui suffit à conclure que h est strictement négative sur $]-\infty,x_2]$ (avec $h(x_2)<h(x_1)<0$). Elle est ensuite bijective de $[x_2,+\infty[$ sur $[h(x_2),+\infty[$ et s'annule une unique fois sur cet intervalle. De plus, $h(1)=2-1-2-2=-3<0$, et $h(2)=16-4-4-2=6>0$, ce qui assure que $1<\alpha<2$ par croissance de h sur $[x_2,+\infty[$ (le réel x_2 étant strictement inférieur à 1).

(d) Commençons par constater que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, ce qui suffit à prouver que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{1+x+x^2} = +\infty$. Ensuite, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x+x^2} = 1$ (que ce soit à gauche ou à droite), donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 0$ (cette fois-ci, ce qui se trouve dans l'exponentielle tend vers $-\infty$).

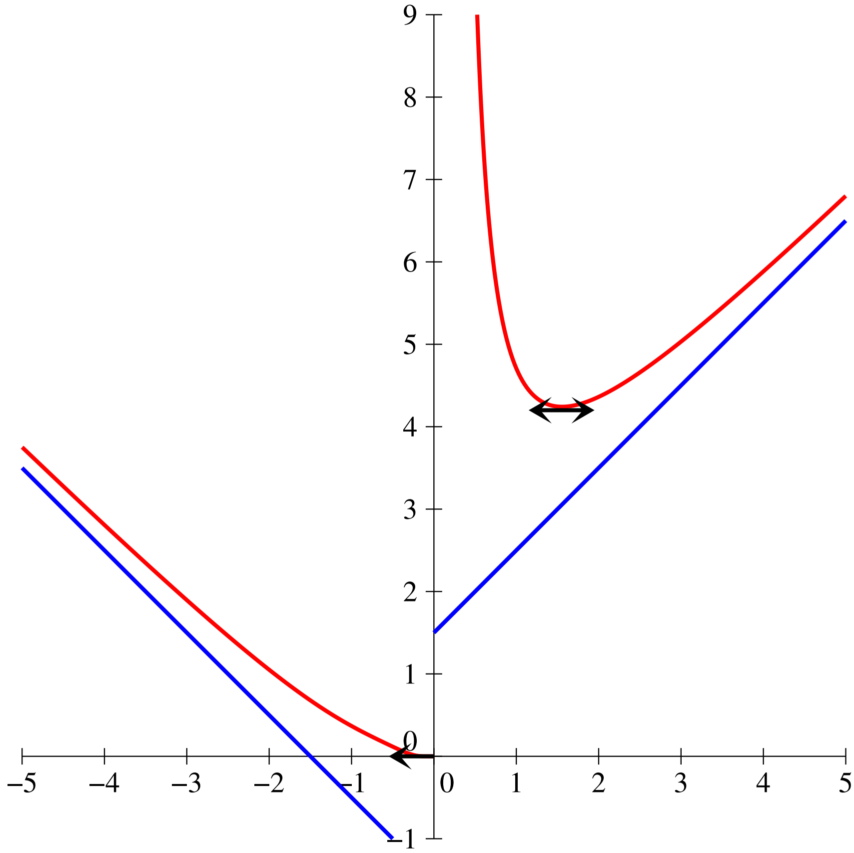
(e) La fonction est bien prolongeable à gauche en 0 en posant $g(0) = 0$ d'après le calcul de limite précédant. De plus, le taux d'accroissement en 0 est alors donné par $\tau(x) = \dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\sqrt{1+x+x^2}$. La racine carrée tend toujours vers 1 en 0, et en posant $X = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = Xe^X$, avec X qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^-. Cette expression a une limite nulle par croissance comparée, ce qui prouve que g prolongée est dérivable à gauche en 0, avec une demi-tangente horizontale.

(f) On a déjà signalé que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, donc $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1 \times \sqrt{x^2} \sim x$.

(g) Commençons donc par écrire que $\dfrac{g(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$, et effectuons un développement limité à l'ordre 3 (il faut multiplier par x à la fin) de cette expression quand $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 : $e^{\frac{1}{x}} = 1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{6x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$, et $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = 1+\dfrac{1}{2}u-\dfrac{1}{8}u^2+\dfrac{1}{16}u^3+o(u^3)$ (en posant $u = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$), soit $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = 1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{8x^2}-\dfrac{1}{4x^3}+\dfrac{1}{16x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right) = 1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{3}{8x^2}-\dfrac{3}{16x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$. Il ne reste plus qu'à effectuer le produit pour obtenir $\dfrac{g(x)}{x} = 1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{3}{8x^2}-\dfrac{3}{16x^3}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{3}{8x^3}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{4x^3}+\dfrac{1}{6x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right) = 1+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{11}{8x^2}+\dfrac{29}{48x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$. Finalement, on obtient $g(x) = x+\dfrac{3}{2}+\dfrac{11}{8x}+\dfrac{29}{48x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Cette expression suffit à prouver que la droite d'équation $y = x+\dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de g en $+\infty$, et comme $g(x)-x-\dfrac{3}{2} \sim \dfrac{11}{8x}$ qui est positif en $+\infty$, la courbe sera au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

(h) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, la même droite ne peut sûrement pas être asymptote ! Pourtant, tout le calcul de la question précédente reste valable à un petit détail près : quand $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$, c'est donc le développement asymptotique de $\dfrac{g(x)}{-x}$ en $-\infty$ qui est donnée par la formule ci-dessus. Autrement dit, il y a un simple changement de signe : la droite d'équation $y = -x-\dfrac{3}{2}$ sera asymptote à la courbe de g en $-\infty$.

(i) Seules des demi-droites sont représentées pour les deux asymptotes :



2. (a) Il suffit d'appliquer le théorème de la bijection sur chacun des deux intervalles $]0, \alpha]$ et $[\alpha, +\infty[$, en utilisant que $g(\alpha) < 5$, ce qui est donné dans l'énoncé.

   (b) Par définition, on a $g(u_n) < g(u_{n+1})$ et $g(v_n) < g(v_{n+1})$. En appliquant la décroissance de g sur $]0, \alpha]$ et sa croissance sur $[\alpha, +\infty[$, on en déduit que $u_n > u_{n+1}$ et $v_n < v_{n+1}$. La suite (u_n) est donc décroissante, et la suite (v_n) croissante. Comme (u_n) est de plus minorée, elle converge nécessairement vers un réel $l \geqslant 0$. Si on avait $l \neq 0$, par passage à la limite, on en déduirait que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n) = g(l)$, ce qui est impossible puisque $g(u_n) = n$, qui tend vers $+\infty$. On a donc nécessairement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. De même, si (v_n) était majorée, elle convergerait vers un réel $l \geqslant \alpha$, ce qui est impossible pour les mêmes raisons que (u_n). La suite n'est donc pas majorée, et elle diverge vers $+\infty$.

   (c) On va en fait partir de $\ln(g(u_n)) = \ln(n)$ (puisque $u_n > 0$, rien ne peut nous empêcher de prendre le ln). Constatons que $\ln(g(x)) = \ln(e^{\frac{1}{x}}) + \ln(\sqrt{1 + x + x^2}) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\ln(1 + x + x^2)$ pour obtenir $\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{2}\ln(1 + u_n + u_n^2) = \ln(n)$. Il suffit de tout multiplier par u_n pour obtenir l'égalité demandée. Comme on sait déjà que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, on aura certainement $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{2}\sqrt{1 + u_n + u_n^2} = 0$ (produit de deux termes de limite nulle), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n) u_n = 1$. Cela revient exactement à dire que $u_n \sim \dfrac{1}{\ln(n)}$.

   (d) Le plus simple est de reprendre notre égalité pour écrire $u_n - \dfrac{1}{\ln(n)} = \dfrac{u_n}{2\ln(n)}\ln(1 + u_n + u_n^2)$ et de prendre un équivalent du membre de droite : $\dfrac{u_n}{2\ln(n)} \sim \dfrac{1}{2\ln^2(n)}$ d'après la question précédente, et comme $u_n + u_n^2$ a une limite nulle, $\ln(1 + u_n + u_n^2) \sim u_n + u_n^2 \sim u_n \sim \dfrac{1}{\ln(n)}$

(u_n^2 étant négligeable devant u_n), soit $u_n - \dfrac{1}{\ln(n)} \sim \dfrac{1}{2\ln^2(n)} \times \dfrac{1}{\ln(n)} \sim \dfrac{1}{2\ln^3(n)}$. On peut écrire ce résultat sous la forme $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)} + \dfrac{1}{2\ln^3(n)} + o\left(\dfrac{1}{\ln^3(n)}\right)$.

(e) Faisons cette fois-ci un développement limité : $\dfrac{u_n}{2\ln(n)} \ln(1 + u_n + u_n^2) = \left(\dfrac{1}{2\ln^2(n)} + \dfrac{1}{4\ln^4(n)} + o\left(\dfrac{1}{\ln^4(n)}\right)\right)\left(\dfrac{1}{\ln(n)} + \dfrac{1}{2\ln^3(n)} + \dfrac{1}{\ln^2(n)} - \dfrac{1}{2\ln^2(n)} + \dfrac{1}{3\ln^3(n)}\right.$ $\left.+o\left(\dfrac{1}{\ln^3(n)}\right)\right) = \dfrac{1}{2\ln^3(n)} + \dfrac{1}{4\ln^4(n)} + \dfrac{5}{12\ln^5(n)} + \dfrac{1}{4\ln^5(n)} + o\left(\dfrac{1}{\ln^5(n)}\right)$. On obtient donc encore mieux que demandé : $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)} + \dfrac{1}{2\ln^3(n)} + \dfrac{1}{4\ln^4(n)} + \dfrac{2}{3\ln^5(n)} + o\left(\dfrac{1}{\ln^5(n)}\right)$.

(f) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{v_n}} = 1$, donc $g(v_n) \sim \sqrt{1 + v_n + v_n^2} \sim \sqrt{v_n^2} \sim v_n$. Comme $g(v_n) = n$, il en découle que $v_n \sim n$.

(g) Il suffit de sortir le v_n de la racine carrée et de tout passer de l'autre côté : $g(v_n) = v_n e^{\frac{1}{v_n}} \sqrt{1 + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}} = n$, donc $v_n = ne^{-\frac{1}{v_n}}\left(1 + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. On sait que $\dfrac{1}{v_n} \sim \dfrac{1}{n}$, soit $\dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on peut donc effectuer un développement limité à l'ordre 1 de tout ça : $e^{-\frac{1}{v_n}} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et $\left(1 + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. En effectuant le produit, $v_n = n \times \left(1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = n - \dfrac{3}{2} + o(1)$. Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - n = -\dfrac{3}{2}$.

(h) Vous l'aurez compris, il s'agit de reprendre les calculs précédents à l'ordre deux puis à l'ordre trois : $\dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{n - \frac{3}{2} + o(1)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1 - \frac{3}{2n} + o(\frac{1}{n})}\right) = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{3}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Profitons-en pour signaler en passant que $\dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{5}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ puisqu'un $\dfrac{1}{n^2}$ s'ajoute. On peut alors écrire $e^{-\frac{1}{v_n}} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{2n^2} + \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; et $\left(1 + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2}u + \dfrac{3}{8}u^2 + o(u^2) = 1 - \dfrac{1}{2n} - \dfrac{5}{4n^2} + \dfrac{3}{8n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} - \dfrac{7}{8n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (en ayant posé $u = \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}$). On obtient donc à l'aide d'un produit que $v_n = n\left(1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{7}{8n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = n - \dfrac{3}{2} - \dfrac{11}{8n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On constate avec un amusement certain que les coefficients nous rappellent ceux de la question 1.g avant de passer à la dernière étape.

On recommence tout ! D'abord $\dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1 - \frac{3}{2n} - \frac{11}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2})} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{3}{2n} + \dfrac{11}{8n^2} + \dfrac{9}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ $\dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n^2} + \dfrac{29}{8n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Au passage, $\dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n^2} + \dfrac{29}{8n^3} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{5}{2n^2} + \dfrac{53}{8n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Il ne reste plus qu'à enchaîner : $e^{-\frac{1}{v_n}} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{2n^2} - \dfrac{29}{8n^3} + \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{3}{2n^3} - \dfrac{1}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{55}{24n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. De plus en plus rigolo, $\left(1 + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2}u + \dfrac{3}{8}u^2 - \dfrac{5}{16}u^3 + o(u^3) = 1 - \dfrac{1}{2n} - \dfrac{5}{4n^2} - \dfrac{53}{16n^3} + \dfrac{3}{8n^2} + \dfrac{15}{8n^3} - \dfrac{5}{16n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) =$

$1-\dfrac{1}{2n}-\dfrac{7}{8n^2}-\dfrac{7}{4n^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Allons, du courage, plus qu'un « petit » produit à faire : $v_n = n\left(1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{55}{24n^3}-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{2n^3}-\dfrac{7}{8n^2}+\dfrac{7}{8n^3}-\dfrac{7}{4n^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$, soit enfin $v_n = n-\dfrac{3}{2}-\dfrac{11}{8n}-\dfrac{8}{3n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ceux qui pensaient naïvement qu'on retrouverait du $\dfrac{29}{48}$ comme au 1.g ont perdu !

Problème 2 (***)

0. Petit préliminaire calculatoire.

1. On remplace simplent : $\dbinom{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1!} = \dfrac{1}{2}$, puis $\dbinom{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} = -\dfrac{1}{8}$, et enfin $\dbinom{\frac{1}{2}}{3} = \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \dfrac{1}{16}$. Ces calculs devraient normalement vous rappeler vaguement quelque chose.
2. Puisqu'on nous donne gentiment la formule, prouvons-là par récurrence. Pour $k=1$, la formule donne une valeur de $\dfrac{2(-1)^0\times 0!}{4\times 1!\times 0!} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, ce qui correspond bien à la valeur de $\dbinom{\frac{1}{2}}{1}$. Supposons désormais la formule vérifiée au rang k, alors $\dbinom{\frac{1}{2}}{k+1} = \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k)}{(k+1)!} = \dbinom{\frac{1}{2}}{k}\times\dfrac{\frac{1}{2}-k}{k+1} = \dbinom{\frac{1}{2}}{k}\times\dfrac{1-2k}{2(k+1)}$. En exploitant l'hypothèse de récurrence, on a donc $\dbinom{\frac{1}{2}}{k+1} = \dfrac{2(-1)^{k-1}(2k-2)!}{4^k k!(k-1)!}\times\dfrac{1-2k}{2(k+1)} = \dfrac{2(-1)^k(2k-1)!}{2\times 4^k(k+1)!(k-1)!}$. On peut multiplier en haut et en bas par $2k$ pour obtenir $\dfrac{2(-1)^k(2k)!}{4^{k+1}(k+1)!k!}$, soit exactement la formule souhaitée au rang $k+1$. On a donc bien prouvé la formule pour tout entier $k\geqslant 1$ par récurrence.

1. Une étude de fonction.

1. La fonction est définie si $x\neq 0$ et $1-4x\geqslant 0$, donc $x\leqslant\dfrac{1}{4}$. Autrement dit, $\mathcal{D}_f =]-\infty,0[\cup\left]0,\dfrac{1}{4}\right]$.
2. On sait que $\sqrt{1+u} = 1+\dfrac{1}{2}u+o(u)$ quand u tend vers 0, donc $\sqrt{1-4x} = 1-2x+o(x)$ et $f(x) = \dfrac{1-(1-2x)+o(x)}{2x}\sim\dfrac{2x}{2x} = 1$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, et donc qu'on peut prolonger f par continuité en 0.
3. On a tout simplement exactement $\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k + o(x^n)$.
4. On peut remplacer sans problème : $\sqrt{1-4x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}4^k x^k + o(x^{n+1})$. Le terme constant de ce développement étant égal à 1, on a donc $1-\sqrt{1-4x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{\frac{1}{2}}{k}4^k x^k + o(x^{n+1})$, puis $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{\frac{1}{2}}{k}4^k x^{k-1} + o(x^n) = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k+1}4^{k+1}x^k + o(x^n)$.

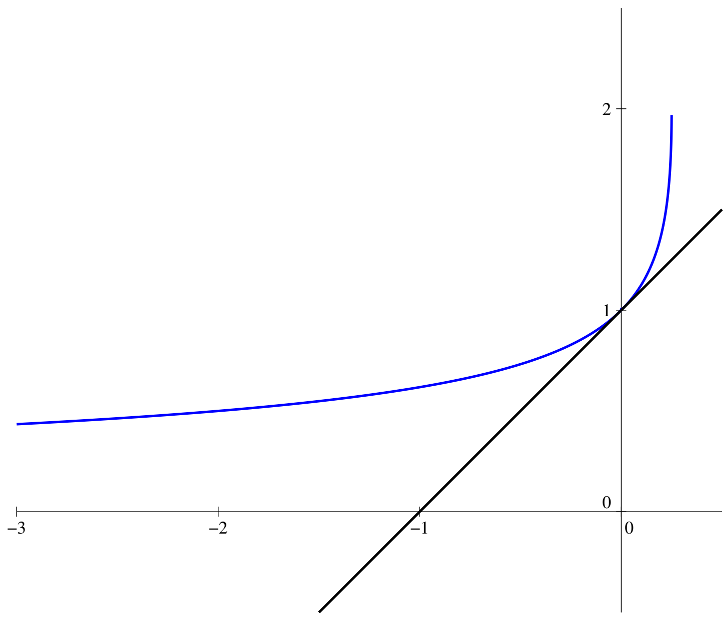
Rappelons que $\binom{\frac{1}{2}}{4} = \binom{\frac{1}{2}}{3} \times \frac{-5}{8} = -\frac{5}{128}$, puis $\binom{\frac{1}{2}}{5} = \binom{\frac{1}{2}}{4} \times \frac{-7}{10} = \frac{7}{256}$ (on peut aussi reprendre la formule générale démontrée en question 0.2). On calcule alors $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + o(x^4)$ (par exemple pour le dernier terme, le coefficient vaut $\frac{1}{2} \times \frac{7}{256} \times 4^5 = \frac{7 \times 1\ 024}{512} = 14$).

5. Puisque la fonction f admet un DL à l'ordre 1 en 0, f est dérivable en 0, et l'équation de sa tangente est donnée par le début du DL : $y = 1 + x$. Comme par ailleurs $f(x) - (1 + x) \sim 2x^2 \geqslant 0$, la courbe est localement située au-dessus de sa tangente.

6. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition et $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{4}{2\sqrt{1-4x}} \times 2x - 2(1 - \sqrt{1 - 4x})}{4x^2}$ $= \dfrac{4x - 2\sqrt{1 - 4x} + 2(1 - 4x)}{4x^2\sqrt{1 - 4x}} = \dfrac{1 - 2x - \sqrt{1 - 4x}}{2x^2\sqrt{1 - 4x}}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif, il faut donc étudier le signe du numérateur : $f'(x) \geqslant 0$ si $1 - 2x \geqslant \sqrt{1 - 4x}$. Comme $x \leqslant \frac{1}{4}$, le membre de gauche de l'inégalité est positif, et notre condition est donc équivalente à $(1-2x)^2 \geqslant 1-4x$, soit $1-4x+4x^2 \geqslant 1-4x$, ce qui est toujours vérifié. Autrement dit, $f'(x) \geqslant 0$ et la fonction f est donc croissante sur tout son domaine de définition (donc sur $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$ après prolongement par continuité). De plus, $f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} \frac{\sqrt{-4x}}{2x} \sim -\frac{1}{\sqrt{-x}}$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Par ailleurs, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1 - 0}{\frac{1}{2}} = 2$, ce qui permet de dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$
f	0	$\nearrow$ 1 $\nearrow$	2

7. Voici l'allure et la tangente demandées :



2. Dénombrement des expressions bien parenthésées.

1. On ne peut avoir de parenthèses équilibrées si la longueur est impaire puisqu'il n'y aura pas autant de parenthèses fermantes que de parenthèses ouvrantes.
2. On a donc $c0 = 1$ (le seul mot convenable étant le mot vide), $c_1 = 1$: () est la seule possibilité bien parenthésée, $c_2 = 2$: on peut écrire ()() ou (()) pour avoir une expression bien parenthésée, et $c_3 = 5$ comme annoncé dans l'énoncé, les possibilités étant ()()(), ()(()), (())(), (()()) et ((())).
3. Il faut simplement choisir l'emplacement des trois parenthèses ouvrantes (les parenthèses fermantes prendront automatiquement les emplacements restants), ce qui peut se faire de $\binom{6}{3} = 20$ façons différentes (seul un quart des choix possibles est donc bien parenthésé).
4. Comme souvent, il est délicat de faire une démonstration extrêmement rigoureuse de ce genre de relation de récurrence. Le but est plutôt d'expliquer l'idée derrière la formule. Ici, pour faire apparaitre la formule, on doit distinguer n possibilités, ce qui va se faire en focntion de l'endroit où va être fermée la première parenthèse ouvrante. Notons que celle-ci est nécessairement fermée à une position paire (en numérotant les positions possibles de 1 à $2n$) puisque ce qui se trouve à l'intérieur de ces deux parenthèses (la première ouvrante et celle qui la ferme) doit nécessairement être une expression bien parenthésée (les parenthèses ouvertes doivent l'être à l'intérieur) donc de longueur paire. En fait :

   - si on ferme notre parenthèse immédiatement, on a une suite de symboles du type $()s$, avec s une suite bien parenthésée de longueur $2n-2$. Réciproquement, toute suite de cette forme convient, et il y en a par définition c_{n-1}, ou encore $c_0 \times c_{n-1}$ puisque $c_0 = 1$.
   - si on ferme notre parenthèse en position 4, on a une suite de la forme $(())s$, avec s une suite bien parenthésée de longueur $2n-4$. Là encore, la réciproque est évidente et on a $c_{n-2} = c_1 \times c_{n-2}$ telles suites (on n'a pas le choix pour ce qui se trouve entre nos deux parenthèses, et $c_1 = 1$).
   - si on ferme notre parenthèse en position 6, on a une suite de la forme $(s_1)s_2$, avec s_1 de longueur 4 et s_2 de longueur $2n-6$. On a enfin le choix pour ce qui se trouve à gauche, $c_2 = 2$ choix possibles en l'occurrence, et donc au total c_2c_{n-3} possibilités.
   - si on ferme notre parenthèse en position 8, on a une suite de la forme $(s_1)s_2$, avec s_1 de longueur 6 et s_2 de longueur $2n-8$. De même que ci-dessus, on obtient c_3c_{n-4} possibilités.
   - plus généralement, en fermant notre parenthèse en position $2k$ (avec $1 \leqslant k \leqslant n$, on aura toujours à choisir une chaîne de longueur $2k-2$ et une autre de longueur $2n-2k$, soit $c_{k-1}c_{n-k}$ possibilités.
   - quitte à faire un léger changement d'indices, la somme de toutes ces possibilités donne bien $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$.

5. C'est un simple calcul : $f(x)^2 = \dfrac{1+1-4x-2\sqrt{1-4x}}{4x^2} = \dfrac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x^2} = \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{1}{x}$, ce qui donne bien $f(x) = 1 + xf(x)^2$.
6. Supposons que le DL d'ordre n de la fonction f s'écrire sous la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, alors $1+xf(x)^2 = 1+x\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)\right)^2$. On va développer le carré de façon inhabituelle en n'écrivant pas de double produit mais en faisant vraiment le produit terme à terme : $1+xf(x)^2 = 1+x\left(\displaystyle\sum_{i+j\leqslant n} a_i a_j x^{i+j} + o(x^n)\right) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} a_i a_{k-i-1} x^k + o(x^n)$ (on a posé $k = i+j+1$ par rapport à la forme précédente, donc $j = k-1-i$ à valeur de k fixée). Comme

cette expression doit être égale à $f(x)$, on peut effectuer une identification des coefficients pour obtenir $a_0 = 1$ puis, $\forall k \geqslant 1$, $a_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i a_{k-1-i}$. Il s'agit exactement de la valeur initiale et de la relation de récurrence vérifiées par la suite (c_n), donc $a_n = c_n$ (ok, on peut pipoter une récurrence pour faire plus rigoureux, mais on n'aura strictement aucun calcul supplémentaire à faire).

7. On sait d'après les calculs de la partie 1 que $a_n = \dfrac{1}{2}(-1)^n \dbinom{\frac{1}{2}}{n+1} 4^{n+1} = \dfrac{(-1)^n 4^{n+1}}{2} \times \dfrac{2(-1)^n (2n)!}{4^{n+1}(n+1)!n!} = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!}$. Autrement dit, $c_n = \dfrac{(2n)!}{(n+1) \times (n!)^2} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.