Feuille d'exercices n° 17 : Analyse asymptotique

MPSI Lycée Camille Jullian

14 mars 2023

Exercice 1 (*)

Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3}$
2. $u_n = (n + 3\ln(n))e^{-(n+1)}$
3. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n^2+1}$
4. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)$
5. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
6. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k!$
7. $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$

Exercice 2 (**)

Soit (u_n) une suite décroissante vérifiant $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$. Montrer que la suite converge nécessairement vers 0 et en donner un équivalent simple. Le résultat reste-t-il vrai si la suite n'est pas supposée décroissante ?

Exercice 3 (***)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{n - 2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$.

1. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer une relation simple entre u_{n+1} et u_n.
3. Prouver par récurrence que $u_n \leqslant n$ puis que $u_n = o(n)$.
4. Déterminer un équivalent simple de u_n.
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 4 (** à ***)

Déterminer des équivalents des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\ln(1+\tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}}$ en 0
2. $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ en $+\infty$
3. $\ln(\cos(x))$ en 0

4. $(x+1)^x - x^x$ en 0
5. $\sqrt{\ln(x+1) - \ln(x)}$ en $+\infty$
6. $\dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$
7. $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x$ en $+\infty$ et en 0
8. $\dfrac{\ln(x^2+1) - \ln(2x^2+1)}{\ln(x^3+1) - \ln(x^3-1)}$ partout où c'est intéressant

Exercice 5 (**)

On considère, pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto x^3 + nx + n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède toujours une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$.
3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
4. Prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$.
5. Montrer que $u_n + 1 \sim \dfrac{1}{n}$, puis que $u_n = -1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
6. Comme vous avez du temps à perdre, continuez les calculs jusqu'à avoir un développement asymptotique à l'ordre $\dfrac{1}{n^5}$.

Exercice 6 (* à **)

Calculer les développements limités suivants (on utilisera la notation $DL_n(a)$ pour indiquer le développement limité à l'ordre n au point a) :

- $DL_4(0), f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
- $DL_6(0), f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$
- $DL_4(1), f(x) = e^x$
- $DL_2(0), f(x) = \sqrt{3 + \cos(x)}$
- $DL_4(0), f(x) = \sqrt{\cos(x)}$
- $DL_5(0), f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$
- $DL_3(0), f(x) = \sqrt{x+2}$
- $DL_4(0), f(x) = \ln(1 + e^x)$
- $DL_6(0), f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$
- $DL_3(0), f(x) = \sqrt{\cos(x)} - \cos(\sqrt{x})$
- $DL_5(0), f(x) = e^{\sin(x)}$
- $DL_3(2), f(x) = x^4$
- $DL_4(0), f(x) = (1 + \sin(x))^x$
- $DL_2(1), f(x) = \arctan(x)$
- $DL_3(1), f(x) = \ln(\sqrt{x})$
- $DL_3(0), f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$
- $DL_3(0), f(x) = \ln(\cos(3x))$
- $DL_3\left(\dfrac{\pi}{3}\right), f(x) = \cos(x)$
- $DL_3(0), f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$
- $DL_2(0), f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$
- $DL_3(0), f(x) = \ln(2e^x + e^{-x})$
- $DL_2(0), f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{2x+1}$
- $DL_2(2), f(x) = x^x$
- $DL_2(0), f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$
- $DL_6(0), f(x) = \mathrm{ch}(\ln(\mathrm{ch}(x)))$
- $DL_4(0), f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\cos(x)}$
- $DL_{17}(0), f(x) = \sqrt{\cos(x^3) + \mathrm{ch}(x^3) - 2}$

Exercice 7 (***)

On note f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$. Montrer que f est bijective et calculer un développement asymptotique à l'ordre $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ de sa réciproque g.

Exercice 8 (* à **)

Calculer (à l'aide de développements limités ou non) les limites suivantes.

- $\lim_{x\to+\infty} x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
- $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-3x+2}$
- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}-x$
- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-\cos(x)}{x^2}$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{ch}(x))}{\mathrm{ch}(\mathrm{sh}(x))}$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3(x)}$
- $\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

Exercice 9 (** à ***)

Étudier le comportement des fonctions suivantes (existence d'asymptote ou de tangente et position relative) à l'endroit indiqué :

1. $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ au voisinage de 0.
2. $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ au voisinage de 0.
3. $f(x)=2\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
4. $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$.
5. $f(x)=x^2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.
6. $f(x)=\frac{\arctan(x)}{\sin^3(x)}-\frac{1}{x^2}$ au voisinage de 0.
7. $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$ en $+\infty$ (on donnera un développement asymptotique avec trois termes).
8. $f(x)=\frac{x\ln(x)}{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$.
9. $f(x)=x^{1-\frac{1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 (***)

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n=n-\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{1}{k}\right)$ et $v_n=u_n+\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ sont adjacentes (au moins à partir d'un certain rang).

Exercice 11 (**)

Pour tout entier naturel n, on note $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(x)\,dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Simplifier l'expression de I_n+I_{n+2}. En déduire la convergence et la limite de (I_n).
3. À l'aide d'une IPP, montrer que $\forall n\geqslant 1$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2x)\tan^n(x)\,dx=\frac{1}{2}-nI_n$.
4. En déduire un équivalent simple de I_n.

Exercice 12 (***)

1. Montrer que l'équation $\tan(x)=x$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left]n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$, qu'on notera désormais u_n (on supposera $n\in\mathbb{N}$ pour la suite).
2. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Donner un équivalent simple de u_n.
3. Montrer que $\arctan(u_n)=u_n-n\pi$, et en déduire un deuxième terme du développement asymptotique de u_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Continuer les calculs jusqu'à obtenir un développement asymptotique de u_n à la précision $\frac{1}{n^3}$.

Exercice 13 (***)

On souhaite dans cet exercice étudier la fonction $f : x \mapsto (x^2-1)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Déterminer rigoureusement l'ensemble de définition de la fonction f. Étudier la parité de f.
2. Calculer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f(x)$. En déduire en particulier l'équation de la tangente en $\mathcal{C}$ à l'origine, ainsi que la position relative de $\mathcal{C}$ et de cette tangente au voisinage de 0.
3. Étude locale au voisinage de $+\infty$.
   (a) Calculer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1-X^2)\ln\left(1+\frac{2X}{1-X}\right)$.
   (b) En déduire un développement asymptotique de f à l'ordre $\frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
   (c) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et de cette asymptote.
   (d) Que se passe-t-il en $-\infty$?
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui, étudier sa dérivabilité à cet endroit.
5. Calculer la dérivée f' de la fonction f et l'exprimer en fonction de $g(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x}$. On rappelle qu'une fonction de la forme $\ln|u|$ peut être immédiatement dérivée en $\frac{u'}{u}$ sans se préocupper du signe de $u(x)$.
6. Étudier les variations et le signe de g sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. On prouvera en particulier que g s'annule en une seule valeur α vérifiant $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$. En déduire le tableau de variations complet de f.
7. Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}$ (on donne $\alpha \simeq 0.65$ et $f(\alpha) \simeq -0.9$).

Exercice 14 (**)

On souhaite étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{(x^2+1)\arctan(x)}{x}$. On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x)$.
3. En déduire que f est prolongeable par continuité et dérivable en 0. Donner l'équation de sa tangente en 0, et la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de cette tangente au voisinage de 0.
4. Montrer que, $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
5. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$, donner son équation ainsi que sa position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$. Que se passe-t-il en $-\infty$?
6. On pose $h(x) = \arctan(x) + \frac{x}{x^2-1}$. Étudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}^{+*}$.
7. En déduire les variations de f.
8. Tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 15 (**)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n l'unique solution sur $[0,+\infty[$ de l'équation $e^x = n - x$.

1. Montrer que la suite (u_n) est correctement définie.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n), puis sa limite éventuelle.
3. Montrer que $u_n \sim \ln(n)$.
4. Montrer que $u_n = \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{u_n}{n}\right)$, en déduire un développement asymptotique de u_n à la précision $\frac{\ln(n)}{n^2}$.

Problème 1 (***)

On s'intéresse dans tout cet exercice à la fonction $g : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x+x^2}$.

1. Étude de la fonction g.
   (a) Déterminer le domaine de définition de g.
   (b) Calculer la dérivée de g et prouver que $g'(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2\sqrt{1+x+x^2}}(2x^3 - x^2 - 2x - 2)$.
   (c) Sans chercher à résoudre d'équation du troisième degré, montrer que g' s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, en une valeur α vérifiant $1 < \alpha < 2$ (on pourra redériver un morceau de g').
   (d) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
   (e) La fonction g prolongée à gauche en 0 admet-elle une demi-tangente à gauche en 0 (si oui, déterminer sa pente) ?
   (f) Donner un équivalent simple de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (g) Effectuer un développement asymptotique de g à l'ordre $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ (on commencera par sortir un facteur x de la racine carrée). En déduire la présence d'une asymptote oblique dont on donnera l'équation, ainsi que la position relative de la courbe de g et de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
   (h) La même droite est-elle asymptote quand x tend vers $-\infty$? Sinon, que se passe-t-il de ce côté-là ?
   (i) Tracer une allure soignée de la courbe représentative de g. On donne $\alpha \simeq 1,55$ et $g(\alpha) \simeq 4,2$.
2. Un peu de suites implicites.
   (a) Justifier que, $\forall n \geqslant 5$, l'équation $g(x) = n$ admet deux solutions distinctes u_n et v_n sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $u_n < \alpha$ et $v_n > \alpha$.
   (b) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont monotones et prouver rigoureusement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
   (c) En partant de l'équation $g(u_n) = n$, montrer que $\ln(n)u_n = 1 + \dfrac{u_n}{2}\ln(1+u_n+u_n^2)$. En déduire un équivalent simple de u_n.
   (d) Montrer que $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)} + \dfrac{1}{2\ln^3(n)} + o\left(\dfrac{1}{\ln^3(n)}\right)$ (attention à la rédaction !).
   (e) Utiliser l'expression précédente pour obtenir le terme suivant du développement asymptotique de la suite (u_n).
   (f) Donner un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$ (on oubliera pas que (v_n) tend elle-même vers $+\infty$, contrairement à (u_n)).
   (g) Montrer que $v_n = ne^{-\frac{1}{v_n}}\left(1 + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, et en déduire la limite de $v_n - n$ quand n tend vers $+\infty$.
   (h) Calculer un développement asymptotique de v_n sous la forme $v_n = n + a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Problème 2 (***)

Le but de ce problème est de calculer les valeurs des nombres de Catalan (nombres intervenant dans beaucoup de problèmes classiques de dénombrement, déjà étudiés dans le dernier problème de la feuille d'exercices n° 15) en exploitant des calculs de développement limités (oui, c'est bien un problème qui mélange dénombrement et DL).

0. Petit préliminaire calculatoire.

Pour tout **réel** x et tout entier naturel k, on définit $\dbinom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}$, avec la convention $\dbinom{x}{0} = 1$.

1. Donner la valeur de $\binom{\frac{1}{2}}{k}$, pour $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$.
2. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\binom{\frac{1}{2}}{k} = \dfrac{2(-1)^{k-1}(2k-2)!}{4^k k!(k-1)!}$.

1. Une étude de fonction.

On s'intéresse dans cette partie à la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
2. Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0.
3. Donner la formule générale du DL d'ordre n en 0 de $\sqrt{1+x}$ en exploitant les nombres $\binom{\frac{1}{2}}{k}$ introduits ci-dessus.
4. En déduire une formule pour le DL d'ordre $n+1$ en 0 de $\sqrt{1-4x}$, puis calculer le DL d'ordre n en 0 de $f(x)$. On donnera en particulier explicitement un DL d'ordre 4 en 0 de $f(x)$.
5. Déduire des calculs précédents l'existence d'une tangente en 0 à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f, donner son équation, ainsi que sa position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$.
6. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations complet.
7. Donner une allure de $\mathcal{C}_f$, en faisant figurer la tangente calculée en question 5.

2. Dénombrement des expressions bien parenthésées.

On s'intéresse dans cette partie à des suites de symboles constituées uniquement de parenthèses ouvrantes (et de parenthèses fermantes), qui sont **bien parenthésées**, c'est-à-dire qui vérifient les deux conditions suivantes :

- il y a autant de (que de).
- chaque parenthèse ouvrante est refermée par une parenthèse fermante située après la parenthèse ouvrante. Autrement dit, lorsqu'on lit la suite de caractères de gauche à droite, on a en permanence croisé au moins autant de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes.

Ainsi, la chaine de caractères (()()) est bien parenthésée mais ())(() ne l'est pas (la deuxième parenthèse fermante apparait alors qu'il n'y a eu qu'une seule parenthèse ouvrante auparavant). Pour tout entier naturel n, on notera c_n le nombre de suites de parenthèses de longueur $2n$ qui sont bien parenthésées.

1. Pourquoi n'avoir considéré que des suites dont la longueur est paire pour la définition des nombres c_n ?
2. Donner la valeur de c_0 (le mot vide est considéré comme bien parenthésé), c_1, c_2 et c_3 en faisant la liste des suites de parenthèses convenables (on devrait trouver $c_3 = 5$).
3. Combien existe-t-il au total de suites de parenthèses de longueur 6 contenant trois parenthèses ouvrantes et trois parenthèses fermantes (sans nécessairement respecter la condition « bien parenthésée ») ?
4. Démontrer que, $\forall n \geqslant 1$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$.
5. Montrer que la fonction f étudiée ci-dessus vérifie l'équation $f(x) = 1 + xf(x)^2$.
6. En déduire que les coefficients de son DL d'ordre n en 0 sont les nombres c_n (on exploitera la relation de la question précédente et l'unicité du DL en 0 d'une fonction).
7. En déduire une expression explicite de c_n en fonction de n.