

# Feuille d'exercices n° 15 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

3 février 2023

## Exercice 1 (\*)

1. Si on tient vraiment à utiliser les outils du cours, il y en a  $\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{5}{1} = 60$ .
2. On va supposer qu'il prend deux entrées différentes, ce qui laisse  $\binom{4}{2} \times 3 = 18$  possibilités.
3. On a désormais  $\binom{4}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{5}{2} = 6 \times 3 \times 10 = 180$  possibilités.

## Exercice 2 (\*\*)

Commençons par remarquer qu'il y a au total  $13^4 = 28\,561$  tirages possibles (ce sont des listes, on suppose toutes les boules distinctes sinon le calcul n'est pas faisable avec les outils du cours).

- Au moins une boule blanche : on passe par le complémentaire, il y a  $8^4$  tirages ne comportant que des boules noires, donc  $13^4 - 8^4 = 24\,465$  tirages avec au moins une boule blanche.
- Au plus une boule noire : on sépare en deux cas. Il y a soit zéro boule noire ( $5^4$  cas) soit une boule noire ( $5^3 \times 8 \times \binom{4}{1}$ , le coefficient binomial étant là pour le choix de la position de la boule noire), donc  $5^4 + 5^3 \times 8 \times \binom{4}{1} = 4\,625$  tirages au total.
- Trois boules noires puis une blanche :  $8^3 \times 5 = 2\,560$  tirages (pas de choix pour l'ordre ici).
- Deux noires et deux blanches :  $8^2 \times 5^2 \times \binom{4}{2} = 9\,600$  tirages possibles (encore une fois, le coefficient binomial correspond au nombre de choix pour les deux boules blanches sur les quatre tirages).

## Exercice 3 (\*\*)

Il y a au total  $\binom{21}{5}$  tirages possibles.

- Il y a 17 atouts qui ne sont pas multiples de 5, donc  $\binom{17}{5}$  tirages qui ne contiennent aucun multiple de 5. Par passage au complémentaire, il reste donc  $\binom{21}{5} - \binom{17}{5}$  tirages avec au moins un multiple de 5.
- Un multiple de cinq et un de trois : il faut distinguer le cas où on tire le 15 (qui est le seul multiple de cinq et de trois à la fois) et celui où les deux multiples sont différents. Sachant qu'il y a onze atouts qui ne sont multiples ni de cinq ni de trois, on a  $\binom{11}{4} + \binom{6}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{11}{3}$  tirages possibles.
- Le 1 ni le 21 (on suppose ici qu'il s'agit d'un ou inclusif, et qu'on a donc le droit de tirer à la fois le 1 et le 21) : par passage au complémentaire,  $\binom{21}{5} - \binom{19}{5}$  tirages.

## Exercice 4 (\*)

1. Il y en a  $n + 1$ , on choisit une valeur de  $a$  entre 0 et  $n$ , et ensuite la valeur de  $b = n - a$  est imposée.
2. Cela revient à choisir deux nombres différents dans un ensemble en contenant  $n + 1$  (les entiers de 0 à  $n$ ), avec un ordre qui ne compte pas, on a donc  $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$  possibilités.
3. Le plus simple est de séparer deux possibilités : si  $b \leq n$ , on a les possibilités déjà comptées à la question précédente. Si  $b > n$  (donc  $n$  choix possibles pour  $b$ ), on peut prendre n'importe quelle valeur parmi les  $n + 1$  possibles pour  $a$ , ce qui fait donc  $n(n + 1)$  choix supplémentaires. Au total, on a donc  $\frac{3n(n+1)}{2}$  possibilités.
4. On se demande bien pourquoi  $a$  et  $b$  se sont transformés en  $x$  et  $y$ , mais peu importe. Si l'ordre n'était pas important, on devrait juste choisir deux entiers consécutifs, ce qui revient en fait à choisir le plus grand des deux, qui doit être compris entre 1 et  $n$ . Il y aurait donc  $n$  couples possibles. En ajoutant l'ordre, on a simplement  $2n$  choix possibles.

## Exercice 5 (\*)

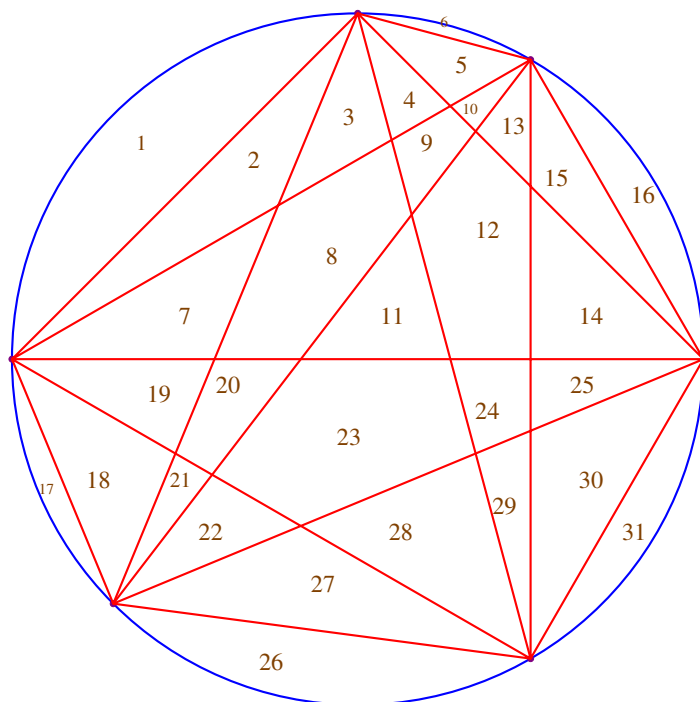
1. On a assez simplement  $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 112 - 67 = 45$ .
2. Il suffit de faire une somme :  $|C| = |A \cap C| + |(B \cap C) \setminus A| + |C \setminus (A \cup B)| = 32 + 5 + 56 = 93$ .
3. Ceux qui ont voté pour au moins l'un des trois sont au nombre de  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B \setminus A| + |C \setminus (A \cup B)| = 112 + 22 + 56 = 190$ . Il en reste donc 10 qui n'ont voté pour aucun des trois.
4.  $A \setminus (B \cup C) = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 112 - 67 - 32 + 12 = 25$ .

## Exercice 6 (\*\* à \*\*\*)

- Aucune condition :  $\binom{32}{5} = 201\,376$  tirages.
- Deux Rois :  $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19\,656$  (on choisit deux cartes parmi les quatre Rois et trois parmi les 28 cartes ne sont pas des Rois).
- Au moins un pique : par passage au complémentaire,  $\binom{32}{5} - \binom{24}{5} = 158\,872$
- Un As et deux carreaux : il faut distinguer le cas de l'As de carreau, ce qui fait  $\binom{7}{1} \times \binom{21}{3}$  (l'As de carreau ; un autre carreau parmi les sept restants ; et trois cartes parmi les 21 qui ne sont ni des carreaux ni des As) +  $\binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2}$  (un As qui n'est pas un carreau, deux carreaux qui ne sont pas des As, et trois autres cartes qui ne sont ni des carreaux ni des As), soit 22 540 tirages.
- Pas de carte en-dessous du 9 :  $\binom{24}{5} = 42\,504$  tirages (il y a 24 cartes au-dessus du 9).
- Deux paires : il faut choisir les hauteurs des deux paires (parmi huit possibles), puis les couleurs des deux cartes pour chaque paire, et enfin la dernière carte, soit  $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{1} = 24\,192$  tirages.
- Cinq cartes de la même couleur : 4 choix pour la couleur, puis 5 cartes à choisir parmi les 8 de la couleur, soit  $4 \times \binom{8}{5} = 224$  tirages possibles.
- Quinte flush : 16 tirages (là, on peut compter à la main).

## Exercice 7 (\*\*)

Si on a  $n$  points disposés sur notre cercle, on pourra tracer  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  cordes différentes reliant deux de ces points. Chacune de ces cordes ajoute un nombre de régions dans le disque égal à  $p+1$ , où  $p$  est le nombre d'autres cordes coupées par la nouvelle corde ajoutée : si la nouvelle corde n'en coupe aucune autre, elle coupe simplement une région en deux et ajoute donc une nouvelle région, si elle coupe exactement une autre corde, elle coupera deux anciennes zones en deux (une avant le point d'intersection avec la corde qu'elle intersecte, une autre après) et ajoutera donc deux nouvelles zones etc. Reste donc à répondre à la question suivante : en plaçant  $n$  points autour de notre cercle, et en traçant toutes les cordes possibles, combien aura-t-on de points d'intersections entre ces cordes ? Si on note ce nombre de points d'intersection  $i_n$ , on aura au total  $1 + \frac{n(n-1)}{2} + i_n$  zones découpées par nos cordes (une zone avant d'avoir installé la moindre corde, une nouvelle zone ajoutée par chacune des  $\frac{n(n-1)}{2}$  cordes sans tenir compte des intersections, plus une nouvelle zone pour chaque intersection, chose qu'on ne doit évidemment compter qu'une seule fois par point d'intersection). Un exemple ci-dessous avec six points placés autour du cercle : on a donc  $n=6$ , et  $\binom{6}{2} = 15$  cordes tracées, qui créent exactement 15 points d'intersection (non, les deux valeurs ne seront pas toujours égales, cf plus bas), et au total  $1 + 15 + 15 = 31$  zones.



Bon, mais alors, combien y a-t-il de points d'intersections entre cordes ? Il y a manifestement des paires de cordes qui ne vont pas se couper, par exemple  $[A_1A_2]$  et  $[A_3A_4]$  n'ont pas de point d'intersection si on numérote les points par ordre d'apparition quand on fait le tour du cercle. Bien sûr, deux cordes se coupant en un point situé sur le cercle, par exemple  $[A_1A_3]$  et  $[A_1A_4]$ , ne doivent pas être comptées. En fait, à l'aide des points  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , il n'y a qu'une seule paire de cordes

donnant une intersection :  $[A_1A_3]$  et  $[A_2A_4]$  qui sont les diagonales du quadrilatère  $A_1A_2A_3A_4$  (les côtés de ce même quadrilatère ne peuvent pas se couper à l'intérieur du disque). Ce sera le cas pour n'importe quel quadruplet de points choisis parmi les points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Il y a donc autant de points d'intersections de cordes à l'intérieur du disque que de quadruplets possibles de points, c'est-à-dire  $\binom{n}{4}$  (c'est bien le cas dans l'exemple donné ci-dessus). Au total, le nombre de zones recherché vaut donc  $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ . On aura ainsi 99 zones pour  $n = 8$  par exemple (je vous laisse faire le dessin). Assez curieusement, le nombre de zones donne les valeurs 1, 2, 4, 8 et 16 pour  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , ce qui pourrait laisser conjecturer la valeur  $2^{n-1}$ , mais en fait pas du tout.

### Exercice 8 (\*\*\*)

- Il y a  $\binom{6}{2}$  parties à 2 éléments dans  $E$  (c'est la définition d'un coefficient binomial!). Soit  $A$  l'une d'entre elles, par exemple  $A = \{1; 2\}$ . Une partie  $B$  vérifiant  $A \cup B = E$  doit nécessairement contenir 3, 4, 5 et 6 (puisqu'ils ne sont pas dans  $A$ , et un sous-ensemble quelconque de  $\{1; 2\}$ . Il y a donc  $2^2$  telles parties  $B$  (pour chaque  $A$  possible).
- De la même façon, si  $A$  est une partie à  $k$  éléments,  $B$  doit nécessairement contenir les éléments qui ne sont pas dans  $A$ , et un quelconque sous-ensemble des  $k$  éléments de  $E$ , ce qui laisse  $2^k$  possibilités pour  $B$  (on a, pour chaque élément de  $A$ , 2 possibilités : soit on le prend, soit on ne le prend pas). Pour  $k = 0$ , c'est-à-dire si  $A = \emptyset$ , on a bien une seule possibilité pour  $B$  ( $E$  tout entier), pour  $k = 1$ , il y en a 2 (soit  $B$  contient l'unique élément de  $A$ , soit non), etc, jusqu'au cas où  $k = 6$ , c'est-à-dire  $A = E$ , où on peut prendre pour  $B$  n'importe quel sous-ensemble de  $E$ , ce qui laisse  $2^6$  possibilités.
- Au total, il y a  $\binom{6}{0} \times 2^0 + \binom{6}{1} \times 2^1 + \dots + \binom{6}{6} \times 2^6$  possibilités, soit  $\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} 2^k = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} 2^k 1^{6-k}$ . On reconnaît une formule du binôme, qui vaut  $(2 + 1)^6 = 3^6 = 729$ .
- Exactement de la même façon, on obtiendra  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$  possibilités, soit  $3^n$ . Une autre façon de trouver ce résultat est de constater que, pour chacun des  $n$  éléments, on a trois possibilités : soit il appartient seulement à  $A$ , soit seulement à  $B$ , soit à  $A \cap B$  (il n'a pas le droit de n'appartenir ni à  $A$  ni à  $B$  si on veut avoir  $A \cup B = E$ ).

### Exercice 9 (\*)

Application directe de l'exemple vu en cours : il y a  $\frac{10!}{4! \times 4!} = 6\,300$  anagrammes pour MISSISSIPPI,  $\frac{11!}{5! \times 2! \times 2!} = 83\,160$  pour ABRACADABRA, et  $\frac{14!}{3! \times 2! \times 2!} = 3\,632\,428\,800$  pour LIPSCHITZIENNE.

### Exercice 10 (\*\*)

Pas vraiment de méthode générale, on va dénombrer au cas par cas :

- s'il n'y a pas d'ex æquo,  $4! = 24$  classements.
- s'il y a quatre ex æquo, 1 classement.

- s'il y a trois ex æquo,  $\binom{3}{4} \times 2 = 8$  classements (il faut choisir les trois ex æquo, et leur classement).
- s'il y a deux ex æquo,  $\binom{2}{4} \times 3! = 36$  classements.
- enfin, s'il y a deux fois deux ex æquo,  $\binom{4}{2} = 6$  classements (il suffit de choisir les deux ex æquo de tête).

Il y a donc au total 75 classements possibles.

## Exercice 11 (\*\*)

1. Manifestement,  $L_1 = 1$  (le seul sous-ensemble possible,  $\{1\}$ , est bien lacunaire). Ensuite,  $L_2 = 2$ , on peut choisir  $\{1\}$  ou  $\{2\}$  mais pas mettre les deux éléments ensemble. Avec trois éléments dans l'ensemble, les trois sous-ensembles contenant un seul élément sont lacunaires, et il faut leur ajouter un seul sous-ensemble à deux éléments :  $\{1, 3\}$ . On a donc  $L_3 = 4$ . Enfin, avec quatre éléments, on garde les quatre sous-ensembles à un seul élément, mais on peut en ajouter trois à deux éléments :  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 4\}$  et  $\{2, 4\}$  (les trois autres sous-ensembles à deux éléments sont constitués d'éléments consécutifs). Autrement dit,  $L_4 = 7$ .
2. Considérons un sous-ensemble lacunaire dans  $\{1, 2, \dots, n+2\}$ . Si cet ensemble contient l'élément  $n+2$ , il ne peut pas contenir l'élément  $n+1$ , mais peut être complété avec n'importe quel sous-ensemble lacunaire de  $\{1, \dots, n\}$ , auxquels il ne faut pas oublier d'ajouter le sous-ensemble vide, qui n'est pas lacunaire dans  $\{1, 2, \dots, n\}$  mais le devient si on y ajoute l'élément  $n+2$ . Il y a donc  $1+L_n$  sous-ensembles lacunaire contenant  $n+2$ . Pour ceux qui ne contiennent pas  $n+2$ , c'est plus simple, ce sont exactement les mêmes que les sous-ensembles lacunaires de  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ , il y en a donc  $L_{n+1}$ . On ne risque pas d'avoir compté deux fois le même ensemble, on a donc bien  $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n + 1$ .
3. Comme il ne s'agit pas exactement d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, on a recours à une astuce diabolique : on pose  $u_n = L_n + 1$  pour constater que  $u_{n+2} = L_{n+2} + 1 = L_{n+1} + L_n + 1 + 1 = u_{n+1} + u_n$ . La suite  $(u_n)$  est donc récurrente linéaire d'ordre 2, avec conditions initiales  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 2$  (on peut poser  $L_0 = 0$ , la relation de récurrence reste alors vérifiée puisque  $L_2 = 1 + 0 + 1$ ). On a alors le choix entre refaire des calculs pénibles, ou reconnaître une suite de Fibonacci légèrement décalée :  $u_n = F_{n+2}$ , donc  $L_n = F_{n+2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) - 1$ .
4. Considérons donc un sous-ensemble lacunaire à  $p$  éléments  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ , on peut lui associer le sous-ensemble  $(a_1, a_2 - 1, \dots, a_p - (p-1))$  qui sera nécessairement inclus dans  $\{1, 2, \dots, n-p+1\}$  et formé d'éléments en ordre strictement croissant (on ne peut pas avoir deux éléments consécutifs égaux sinon l'ensemble de départ ne serait pas lacunaire). Réciproquement, tout sous-ensemble de  $p$  éléments strictement croissants de  $\{1, 2, \dots, n+1-p\}$  peut être associé à un sous-ensemble lacunaire en effectuant la transformation inverse (on ajoute 1 au deuxième élément, 2 au troisième etc). Il y a donc autant de sous-ensembles lacunaires à  $p$  éléments que de sous-ensembles à  $p$  éléments dans  $\{1, 2, \dots, n+1-p\}$ , c'est-à-dire  $\binom{n+1-p}{p}$ .

## Exercice 12 (\*\*)

1. On a  $k$  cases à noircir sur un total de  $np$ , donc  $\binom{np}{k}$  grilles possibles.
2. Il reste  $k-4$  cases à noircir parmi  $np-4$ , donc  $\binom{np-4}{k-4}$  (naturellement, on doit avoir  $k \geq 4$ ).

3. Il faut choisir les deux coins, puis noircir  $k - 2$  cases parmi les  $np - 4$  qui ne sont pas des coins, donc  $\binom{4}{2} \times \binom{np - 4}{k - 2}$  possibilités.
4. Cela suppose que  $k \leq n$ . Il faut alors choisir les  $k$  lignes contenant une case parmi les  $n$  possibles, puis il reste pour chacune de ces lignes  $p$  choix pour la case à noircir, donc  $\binom{n}{k} \times p^k$  grilles possibles.
5. La grille a donc  $n$  lignes et  $n$  colonnes, et on cherche à noircir une case par ligne, sans en mettre deux dans la même colonne. Il y a  $n$  choix possibles pour la case à noircir sur la première ligne,  $n - 1$  choix pour la case de la deuxième ligne (il ne faut pas la mettre dans la même colonne que la première),  $n - 2$  pour la troisième etc. Quand on arrive à la dernière ligne, on n'a plus le choix pour la dernière case à noircir (il ne reste qu'une seule colonne vierge). On a donc  $n \times (n - 1) \times \cdots \times 1 = n!$  grilles possibles.
6. On aurait  $9!$  choix s'il n'y avait pas la condition supplémentaire sur les petits carrés. Le mieux est de recommencer une raisonnement similaire à celui de la question précédente :
  - il y a 9 possibilités pour le 1 de la première ligne.
  - il y a seulement 6 possibilités ensuite pour le 1 de la deuxième ligne (trois cases à éviter qui sont dans le même petit carré que le premier 1).
  - plus que 3 possibilités pour la troisième ligne (un seul petit carré vierge en haut de la grille).
  - à nouveau 6 possibilités pour la quatrième ligne (plus de problème de petit carré, mais tout de même trois colonnes à éviter).
  - 4 pour la cinquième ligne (deux colonnes libres dans deux petits carrés).
  - 2 pour la sixième (deux colonnes dans le dernier petit carré médian).
  - 3 sur la septième ligne (plus que trois colonnes libres).
  - 2 et 1 pour les deux dernières.

Soit  $9 \times 6 \times 3 \times 6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 46\ 656$  façons de placer les 1.

7. Au total, il y a  $\binom{81}{9}$  façons de placer neuf 1 dans une grille de 81 cases, soit 260 887 834 350 possibilités. La proportion de placements « Sudoku-compatibles » est donc extrêmement faible !

### Exercice 13 (\*\*)

1.
  - Pour  $n = 1$ , le seul mot terne est  $a$ .
  - Pour  $n = 2$ , un mot terne devrait commencer et finir par  $a$ , tout en ayant ses deux lettres (qui sont adjacentes) distinctes, c'est impossible. Il n'y a donc pas de mot terne de longueur 2.
  - Pour  $n = 3$ , le mot doit commencer et finir par  $a$ , et la lettre médiane ne doit pas être un  $a$ , ce qui laisse les deux possibilités  $aba$  et  $aca$ .
  - Pour  $n = 4$ , les deux lettres médianes ne peuvent à nouveau être des  $a$  (elles cotoient soit le  $a$  initial soit le  $a$  final), et doivent en plus être distinctes, ce qui ne laisse que les deux possibilités  $abca$  et  $acba$ .
  - Pour  $n = 5$ , on peut choisir de mettre un  $a$  en lieu de mot, auquel cas les deuxième et quatrième lettre peuvent être un  $b$  ou un  $c$  indépendamment l'une de l'autre ; mettre un  $b$  au milieu, ce qui impose de l'encadrer par deux  $c$  (puisque ces lettres cotoient à la fois un  $a$  et un  $b$ ) ; ou enfin un  $c$  médian encadré par deux  $b$ . Cela fait un total de 6 possibilités :  $ababa$ ,  $abaca$ ,  $acaba$ ,  $acaca$ ,  $acbca$  et  $abcba$ .
  - Pour  $n = 6$ , soit on met un  $a$  en troisième, on a deux possibilités pour la deuxième lettre (cf le cas  $n = 2$ ), et deux pour les lettres 4 et 5 (cf le cas  $n = 3$ ) ; soit on met un  $a$  en quatrième, ce qui donne quatre autres possibilités ; soit on ne met pas du tout de  $a$  en-dehors des extrémités, et on a deux possibilités (on alterne des  $b$  et des  $c$  en commençant

par l'un ou l'autre). Soit un total de 10 mots ternes de longueur 6 :  $ababca, abacba, acabca, acacba, abcaba, acbaba, abcaca, acbaca, abcbca$  et  $acbcbca$ .

2. Considérons donc l'ensemble des mots ternes de longueur  $n$ , pour un certain entier  $n \geq 3$ , et séparons-les en deux catégories selon la nature de la lettre placée en position  $n - 2$  dans le mot.

- s'il s'agit d'un  $a$ , le mot obtenu en supprimant les deux dernières lettres de notre mot était déjà terne (il commençait et finissait par  $a$ , et ne pouvait certainement pas avoir deux lettres consécutives identiques si on veut que notre mot à nous soit terne). Par ailleurs, les deux dernières lettres de notre mot sont soit  $ba$ , soit  $ca$ . Réciproquement, à tout mot terne de longueur  $n - 2$ , on peut bien associer deux mots ternes de longueur  $n$  en ajoutant soit  $ba$  soit  $ca$  à la fin du mot. Cette construction nous donne déjà  $2 \times t_{n-2}$  mots ternes de longueur  $n$ .
- si au contraire notre lettre numéro  $n - 2$  n'est pas un  $a$ , mais par exemple un  $b$ , alors notre mot s'achève nécessairement par  $bca$  (s'il s'agit d'un  $c$  il s'achève par  $cba$  et le raisonnement est le même). Considérons alors le mot obtenu en supprimant l'avant-dernière lettre de notre mot (ici le  $c$ ), on retombe alors sur un mot terne (de longueur  $n - 1$ ) car on n'a sûrement pas fait apparaître de lettres adjacentes identiques. Réciproquement, à partir de n'importe quel mot terne de longueur  $n - 1$ , on peut en construire un (et un seul) en insérant la bonne lettre en avant-dernière position : si le mot de longueur  $n - 1$  finit par  $ba$ , on introduit un  $c$  entre le  $b$  et le  $a$  ; s'il finit par  $ca$ , on introduit un  $b$ . On obtient ainsi exactement  $t_{n-1}$  nouveaux mots ternes de longueur  $n$ , qui sont évidemment distincts des précédents (puisque la lettre numéro  $n - 2$  n'est pas la même).

Globalement, on a bien trouvé  $2t_{n-2} + t_{n-1}$  mots ternes de longueur  $n$ , soit  $t_n = 2t_{n-2} + t_{n-1}$ .

3. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est  $x^2 - x - 2 = 0$ , elle a pour discriminant  $\Delta = 1 + 8 = 9$ , et admet donc deux racines  $r = \frac{1+3}{2} = 2$ , et  $s = \frac{1-3}{2} = -1$ . On peut donc écrire  $t_n$  sous la forme  $t_n = \alpha 2^n + \beta (-1)^n$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes déterminées par les deux premiers termes de la suite. Ici,  $t_1 = 2\alpha - \beta = 1$ , et  $t_2 = 4\alpha + \beta = 0$ . En additionnant les deux équations, on obtient  $6\alpha = 1$ , soit  $\alpha = \frac{1}{6}$  ; puis  $\beta = 2\alpha - 1 = -\frac{2}{3}$ . Finalement,  $t_n = \frac{1}{6} \times 2^n - \frac{2}{3} \times (-1)^n = \frac{2^{n-1} - 2(-1)^n}{3}$ .

### Exercice 14 (\*\*\*)

1. Prenons par exemple l'application  $f$  suivante :  $f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 1, f(4) = 4$  et  $f(5) = 2$ , il s'agit d'une involution (on vérifie aisément que  $f \circ f = \text{id}$ ), avec un point fixe. On ne peut pas trouver d'involution sans point fixe de  $E$  : par définition, on devrait avoir  $f(1) = k \neq 1$ , et pour que  $f$  soit une involution, on doit avoir  $f(k) = 1$ . Autrement dit,  $f$  échange les entiers 1 et  $k$ . De même, elle échange 2 (si  $k \neq 2$ , sinon on passe à 3) avec un autre entier  $k'$ . Il reste alors le cinquième entier qui ne peut être envoyé que sur lui-même. En fait, plus généralement, on aura toujours  $S_n = 0$  lorsque  $n$  est un entier impair.
2. Si  $E$  contient un seul élément, il existe une seule involution (avec un point fixe), l'identité elle-même. Lorsque  $E$  contient deux éléments, il y en a deux (soit on ne bouge rien, soit on échange les deux éléments), dont une a un point fixe. Avec trois éléments, il y a quatre involutions qui ont toutes un point fixe : l'identité, l'application échangeant 1 et 2 (en laissant 3 fixe), celle échangeant 1 et 3, et enfin celle échangeant 2 et 3. Finalement,  $T_1 = 1, T_2 = 2$  et  $T_3 = 4$  ;  $S_1 = S_3 = 0$  et  $S_2 = 1$ .
3. L'inégalité  $S_n \leq T_n$  est triviale puisqu'une involution sans point fixe est un cas particulier d'involution. La deuxième l'est à peine moins puisque toute involution est nécessairement bijective (par définition, une involution est sa propre réciproque) et qu'il y a au total  $n!$  bijections sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

4. (a) Si on impose  $f(1) = k$  (avec bien sûr  $k \neq 1$ ), on doit avoir  $f(k) = 1$ . Il ne reste plus qu'à choisir les images des  $n$  éléments restants de  $E$  de façon à ce que la restriction de  $f$  à ces  $n$  éléments soit une involution sans point fixe, ce qui par définition peut se faire de  $S_n$  façons. Reste à compter le nombre de valeurs de  $k$  possibles : il y en a  $n + 1$ , d'où  $S_{n+2} = (n + 1)S_n$ .

(b) C'est presque le même raisonnement qu'à la question précédente : pour construire une involution (avec points fixes autorisés), soit on choisit  $f(1) = k \neq 1$  (ce qui impose  $f(k) = 1$ ), et on choisit une involution (avec points fixes) des  $n$  entiers restants, ce qui laisse donc  $(n + 1)T_n$  possibilités ; soit on choisit  $f(1) = 1$ , et il ne reste qu'à choisir une involution des  $n + 1$  entiers restants, ce qui fait  $T_{n+1}$  possibilités. On en déduit donc que  $T_{n+2} = T_{n+1} + (n + 1)T_n$ .

5. On sait déjà que  $S_{2n+1} = 0$  pour tout entier naturel  $n$ . De plus, la relation  $S_{2n} = (2n - 1)S_{2n-2}$  combinée à la condition initiale  $S_2 = 1$  implique que  $S_{2n} = \prod_{k=1}^n (2k - 1)$  (on peut faire une récurrence si on tient vraiment à être rigoureux). On peut écrire ça plus joliment :  $S_{2n} = \frac{(2n) \times (2n - 1) \times (2n - 2) \times \cdots \times 2}{(2n) \times (2n - 2) \times \cdots \times 2} = \frac{(2n)!}{2 \times n \times 2 \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1} = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}$ .

6. L'égalité des deux sommes est une conséquence immédiate de la symétrie des coefficients binomiaux (on remplace  $k$  par  $n - k$  pour passer d'une somme à l'autre). Comme on ne voit vraiment pas d'où peut sortir cette formule, on va procéder par récurrence double : pour

$n = 1$ ,  $T_1 = 1$  et  $\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} S_k = S_0 + S_1 = 1$  (si vous n'êtes pas convaincu par le fait que  $S_0 = 1$ , réfléchissez-y mieux : il y a une involution de l'ensemble vide vers lui-même, qui consiste à ne rien faire, et cette involution n'a pas de point fixe puisqu'il n'y a pas d'éléments dans l'ensemble ! Sinon, on peut se contenter de constater que la formule obtenue pour  $S_{2n}$  est cohérente avec la valeur  $S_0 = 1$ ). La formule est donc vraie au rang 1. Vérifions-là aussi

au rang 2 :  $\sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} S_k = S_0 + 2S_1 + S_2 = 2 = T_2$ , ce qui est à nouveau vérifié. Passons à

l'hérédité :  $T_{n+2} = T_{n+1} + (n+1)T_n = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k + (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k$ . On utilise le fait que

$(n+1) \binom{n}{k} = (k+1) \binom{n+1}{k+1}$  (une version un peu inhabituelle de la formule sans nom) pour

obtenir  $T_{n+2} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k + \sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n+1}{k+1} S_k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_{k+2}$

en exploitant la formule de récurrence obtenue sur la suite  $(S_n)$  à la question 4.a. On regroupe

le tout :  $T_{n+2} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k + \sum_{k=2}^{n+2} \binom{n+1}{k-1} S_k$ . Le terme numéro 1 de la somme de gauche

est nul, on peut le supprimer et écrire  $T_{n+2} = S_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \left( \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k-1} \right) S_k + S_{n+2} =$

$\sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} S_k$  (on applique la relation de Pascal et on réintègre les termes extrêmes dans la somme), ce qui prouve la propriété au rang  $n + 2$  et achève notre récurrence double.

En reprenant la formule trouvée pour  $S_{2n}$ , on peut donc écrire  $T_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \times \frac{(2k)!}{2^k k!} =$

$\sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{2^k k! (2n - 2k)!}$ . De même on aura pour les entiers impairs  $T_{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(2n+1)!}{2^k k! (2n+1 - 2k)!}$



(formule qu'on ne peut pas vraiment simplifier). Application numérique :  $T_{10} = \frac{10!}{10!} + \frac{10!}{2 \times 8!} + \frac{10!}{4 \times 2 \times 6!} + \frac{10!}{8 \times 6 \times 4!} + \frac{10!}{16 \times 24 \times 2} + \frac{10!}{32 \times 120} = 9\,496$ . Si on compare ce nombre à  $10! = 3\,628\,800$ , on constate que seule une petite partie des bijections sont des involutions sans point fixe (un peu moins de 0.3%).

## Problème 1 (\*\*\*)

1. Il n'y a qu'une seule partition de  $E_1$ . Pour  $E_2$ , on a deux possibilités : soit regrouper les deux éléments (un seul sous-ensemble dans la partition), soit les séparer (deux sous-ensembles). Enfin, pour  $E_3$ , on peut regrouper les trois éléments (un seul sous-ensemble), les séparer tous les trois, ou faire une partition en deux sous-ensembles dont l'un contient un élément et l'autre les deux qui restent (trois possibilités selon le choix de l'élément isolé). Il y a donc cinq partitions différentes de  $E_3$ .
2. S'il y a  $n$  sous-ensembles non vides et disjoints, chacun doit comporter exactement 1 élément, et il n'y a donc qu'une seule partition possible. S'il y a  $n - 1$  sous-ensembles, ils contiennent tous un élément, sauf un qui en contient deux. Il faut donc choisir quels sont les deux éléments qui sont regroupés, ce qui laisse  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  partitions.
3. Il y a deux types de partitions : celles qui ont 7 sous-ensembles réduits à un élément et le huitième qui en contient 3 (au nombre de  $\binom{10}{3}$ , de manière similaire à la question précédente); et celles qui ont 6 sous-ensembles réduits à deux éléments et les deux derniers qui en contiennent 2. Ces dernières sont au nombre de  $\frac{1}{2} \binom{10}{2} \binom{8}{2}$  (il faut choisir les deux éléments du premier ensemble, les deux du deuxième parmi ceux qui restent, et diviser par deux car l'ordre n'est pas important). Au total donc,  $\binom{10}{3} + \frac{1}{2} \binom{10}{2} \binom{8}{2}$  partitions.
4. Le même raisonnement conduit à  $\binom{n}{3} + \frac{1}{2} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2}$ .
5. (a) Il faut tout simplement choisir l'élément isolé, et il y a  $n$  possibilités pour cela, ou si l'on préfère  $\binom{n}{1}$  possibilités.  
 (b) De la même façon, il faut choisir les deux éléments du premier ensemble, soit  $\binom{n}{2}$  partitions possibles.  
 (c) En général, on aura  $\binom{n}{k}$  partitions en deux sous-ensembles dont l'un contient  $k$  éléments. Attention tout de même,  $k$  est compris entre 1 (le premier ensemble n'a pas le droit d'être vide) et  $n - 1$  (le deuxième ne doit pas être vide non plus!). Autre piège, si on fait la somme pour  $k$  variant entre 1 et  $n - 1$ , on compte en fait deux fois chaque partition (en effet, on obtient la même partition en échangeant le rôle du premier et du deuxième ensemble : par exemple, les partitions obtenues pour  $k = 1$  sont les mêmes que celles obtenues pour  $k = n - 1$ ). Il y a donc au total  $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k = n - 1 \binom{n}{k} = \frac{1}{2}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$  partitions en deux sous-ensembles.
6. (a) Si  $E$  est constitué de  $2 \times 1 = 2$  éléments, il n'y a qu'une façon de le partitionner en sous-ensembles à deux éléments, donc  $a_1 = 1$ . Si  $E$  a quatre éléments, on peut le partitionner de trois façons en deux paires (il faut choisir qui on case avec le premier élément, l'autre paire est alors imposée), donc  $a_2 = 3$ . Enfin, si  $E$  contient 6 éléments, on a cinq choix

pour l'élément à caser avec 1, et ensuite trois possibilités à chaque fois pour apparier les quatre éléments restants, donc  $a_3 = 5 \times 3 = 15$ .

(b) On fait comme ci-dessus : si  $E$  contient  $n = 2p$  éléments, on commence par choisir l'élément qu'on va apparier avec 1, ce pour quoi on a  $n - 1 = 2p - 1$  choix. Une fois ce choix fait, il reste à partitionner les  $n - 2 = 2p - 2 = 2(p - 1)$  éléments restants en paires, ce pour quoi on a par définition  $a_{p-1}$  possibilités. Cela laisse bien  $(2p - 1)a_{p-1}$  possibilités pour séparer  $E$  en paires, donc  $a_p = (2p - 1)a_{p-1}$ .

(c) D'après la question précédente, on a  $a_p = (2p - 1) \times a_{p-1} = (2p - 1) \times (2p - 3)a_{p-2} = (2p - 1) \times (2p - 3) \times \dots \times 5 \times 3$  (ce qui est cohérent avec les calculs de  $a_2$  et  $a_3$ ). Autrement dit 
$$a_p = \frac{(2p) \times (2p - 1) \times \dots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{(2p) \times (2p - 2) \times \dots \times 4 \times 2} = \frac{(2p)!}{2 \times p \times 2 \times (p - 1) \times \dots \times 2 \times 2 \times 2 \times 1} = \frac{(2p)!}{2^p p!}.$$

(d) Le nombre demandé est exactement  $a_{10} = \frac{20!}{2^{10} \times 10!} = 19 \times 17 \times \dots \times 5 \times 3 = 654\,729\,075$ .

Si on ne considère que des couples hétéro avec 10 filles et 10 garçons, la première fille (soyons galants) a 10 choix pour son compagnon, la deuxième n'en a plus que 9 etc, et la dernière fille n'a plus le choix (ceci n'est pas censé modéliser ce qui se passe dans la vraie vie), soit  $10! = 3\,628\,800$  possibilités. Autrement dit, si on apparie aléatoirement 10 filles et 10 garçons, on a peine plus d'une chance sur 200 d'obtenir dix couples hétérosexuels.

## Problème 2 (\*\*\*)

### Première partie : Exemples et généralités

1. Soit  $f$  une application surjective de  $\{1, 2, 3\}$  dans  $\{1, 2\}$ . Les triplets possibles pour  $(f(1), f(2), f(3))$  sont  $(1, 1, 2)$ ,  $(1, 2, 1)$ ,  $(1, 2, 2)$ ,  $(2, 1, 1)$ ,  $(2, 1, 2)$  et  $(2, 2, 1)$ , ce qui nous donne  $S_{3,2} = 6$ .  
De même, si  $g$  est une application surjective de  $\{1, 2, 3, 4\}$  dans  $\{1, 2\}$ , les quadruplets possibles pour  $(g(1), g(2), g(3), g(4))$  sont  $(1, 1, 1, 2)$ ,  $(1, 1, 2, 1)$ ,  $(1, 1, 2, 2)$ ,  $(1, 2, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 1, 2)$ ,  $(1, 2, 2, 1)$ ,  $(1, 2, 2, 2)$ ,  $(2, 1, 1, 1)$ ,  $(2, 1, 1, 2)$ ,  $(2, 1, 2, 1)$ ,  $(2, 1, 2, 2)$ ,  $(2, 2, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 1, 2)$  et  $(2, 2, 2, 1)$ , d'où  $S_{4,2} = 14$ .
2. Une application ayant pour ensemble de départ  $\{1, 2, \dots, n\}$  ne peut prendre qu'au plus  $n$  valeurs différentes, donc ne pourra pas être surjective dans  $\{1, 2, \dots, p\}$  si  $n < p$ . Autrement dit,  $S_{n,p} = 0$  dans ce cas.
3. La seule application ayant pour ensemble d'arrivée l'ensemble réduit à un seul élément  $\{1\}$  est l'application constante égale à 1 (quel que soit l'ensemble de départ). Elle est par ailleurs surjective dès que  $n \geq 1$ , donc  $S_{n,1} = 1$  pour  $n \geq 1$ .
4. Une application surjective de  $\{1, 2, \dots, n\}$  dans lui-même n'est autre qu'une permutation de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ , qui sont au nombre de  $n!$ , donc  $S_{n,n} = n!$ .

### Deuxième partie : Détermination de $S_{n,2}$

1. On a vu plus haut que  $S_{2,2} = 2! = 2$ .
2. Considérons une application surjective  $f$  de  $\{1, 2, \dots, n + 1\}$  dans  $\{1, 2\}$ , et supposons que  $f(n + 1) = 1$ . Pour que  $f$  soit surjective, il suffit alors que la restriction de  $f$  à  $\{1, 2, \dots, n\}$  soit déjà surjective ( $u_n$  possibilités) ou que  $f(1) = f(2) = \dots = f(n) = 2$ . Il y a de même  $u_n + 1$  applications surjectives pour lesquelles  $f(n + 1) = 2$ , ce qui nous donne bien au total  $u_{n+1} = 2(u_n + 1)$ .
3. La suite  $(u_n)$  est une suite arithmético-géométrique. Son équation de point fixe,  $x = 2x + 2$ , a pour solution  $x = -2$ . Posons donc  $v_n = u_n + 2$ , on a alors  $v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = 2u_n + 2 + 2 = 2(u_n + 2) = 2v_n$ . La suite  $(v_n)$  est donc une suite géométrique de raison 2 et vérifiant  $v_2 = u_2 + 2 = 4$ . On en déduit que  $\forall n \geq 2$ ,  $v_n = 4 \times 2^{n-2} = 2^n$ , puis  $u_n = v_n - 2 = 2^n - 2$ .

4. Il y a au total  $2^n$  applications de  $\{1, 2, \dots, n\}$  dans  $\{1, 2\}$ . Parmi celles-ci, les seules qui ne sont pas surjectives sont les deux applications constantes respectivement égales à 1 et à 2. Le nombre d'applications surjectives est donc  $2^n - 2$ .

### Troisième partie : Détermination de $S_{n,3}$

1. Toujours en revenant à la dernière question de la première partie,  $v_3 = S_{3,3} = 3! = 6$ .
2. Soit  $g$  une application surjective de  $\{1, 2, \dots, n+1\}$  dans  $\{1, 2, 3\}$  telle que  $g(n+1) = 3$ . Il y a alors deux possibilités pour la restriction de  $g$  à  $\{1, 2, \dots, n\}$  : soit elle est surjective dans  $\{1, 2, 3\}$ , soit elle est surjective dans  $\{1, 2\}$  (sans prendre la valeur 3). Ces deux possibilités ne pouvant se produire simultanément, il y a  $v_n + u_n$  applications  $g$  convenables. Un raisonnement identique dans le cas où  $g(n+1) = 1$  et  $g(n+1) = 2$  nous permet d'obtenir au total  $v_{n+1} = 3(v_n + u_n)$ . Comme  $u_n = 2^n - 2$ , on a donc  $v_{n+1} = 3v_n + 3 \times 2^n - 6$ .
3. D'après le résultat de la question 2,  $w_{n+1} = v_{n+1} - 3 = 3v_n + 3 \times 2^n - 6 - 3 = 3(v_n - 3 + 2^n) = 3(w_n + 2^n)$ . Calculons  $t_{n+1} = w_{n+1} + 3 \times 2^{n+1} = 3(w_n + 2^n + 2^{n+1}) = 3(w_n + 2^n + 2 \times 2^n) = 3(w_n + 3 \times 2^n) = 3t_n$ . La suite  $(t_n)$  est donc bien géométrique de raison 3. Il ne reste plus qu'à remonter :  $t_3 = w_3 + 3 \times 2^3 = w_3 + 24 = v_3 - 3 + 24 = v_3 + 21 = 6 + 21 = 27$ . On en déduit que  $t_n = 27 \times 3^{n-3} = 3^n$ , puis  $w_n = 3^n - 3 \times 2^n$  et enfin  $v_n = 3^n - 3 \times 2^n + 3$ .
4. Les applications de  $\{1, 2, \dots, n+1\}$  dans  $\{1, 2, 3\}$  peuvent être classées selon le nombre de valeurs différentes qu'elles prennent : soit elles prennent les trois valeurs possibles, et il y a par définition  $v_n$  telles applications, soit elles en prennent exactement deux, qu'on peut choisir de  $\binom{3}{2} = 3$  façons différentes, et il y a à chaque fois  $u_n$  telles applications, donc  $3u_n$  au total, soit elles sont constantes, ce pour quoi on a 3 possibilités. Comme il y a un total de  $3^n$  applications de  $\{1, 2, \dots, n\}$  dans  $\{1, 2, 3\}$ , on obtient la relation  $3^n = v_n + 3u_n + 3$ , donc  $v_n = 3^n - 3u_n - 3 = 3^n - 3(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \times 2^n + 3$ .

### Quatrième partie : Détermination de $S_{n+1,n}$

1. L'application  $f$  étant surjective, tout élément de  $\{1, 2, \dots, n\}$  admet (au moins) un antécédent par  $f$ . Choisissons donc un antécédent pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée, cela nous donne  $n$  éléments de  $\{1, 2, \dots, n+1\}$  ayant des images distinctes par  $f$ . Le dernier élément de  $\{1, 2, \dots, n+1\}$  a une image identique à l'un des autres éléments de  $\{1, 2, \dots, n+1\}$  (puisque l'on a déjà épuisé tous les éléments de l'ensemble d'arrivée), et cette image est bien l'unique élément de notre ensemble d'arrivée ayant exactement deux antécédents.
2. Il faut choisir deux éléments dans un ensemble en contenant  $n+1$ , il y a donc  $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$  possibilités.
3. Une fois choisis l'élément de l'ensemble d'arrivée ayant deux antécédents ( $n$  possibilités) et les deux antécédents en question, les  $n-1$  éléments restants dans chaque ensemble sont reliés de façon bijective par  $f$ , ce qui laisse  $(n-1)!$  possibilités. On a donc  $S_{n+1,n} = n \times \frac{n(n+1)}{2} \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$ .

### Cinquième partie : Cas général

1. Considérons une application surjective  $f$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  dans  $\{1, 2, \dots, p\}$ . On a  $p$  choix possibles pour l'image de  $n$  par cette application, et la restriction de  $f$  à  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  est soit surjective vers  $\{1, 2, \dots, p\}$  (il y a pour cela  $S_{n-1,p}$  possibilités), soit elle prend toutes les valeurs sauf  $f(n)$  (il y a pour cela  $S_{n-1,p-1}$  possibilités). Cela nous donne bien la relation de récurrence  $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$ .

2.

$S_{n,p}$	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
$n = 0$	0	0	0	0	0	0
$n = 1$	0	1	0	0	0	0
$n = 2$	0	1	2	0	0	0
$n = 3$	0	1	6	6	0	0
$n = 4$	0	1	14	36	24	0
$n = 5$	0	1	30	150	240	120

3. Calculons séparément les membres de gauche et de droite :  $\binom{p}{k} \binom{k}{j} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{p!}{(p-k)!(k-j)!j!}$ . De l'autre côté,  $\binom{p}{j} \binom{p-j}{k-j} = \frac{p!}{j!(p-j)!} \frac{(p-j)!}{(k-j)!(p-k)!} = \frac{p!}{j!(k-j)!(p-k)!}$ . Les deux membres sont bien égaux.

4. On a, en utilisant l'égalité précédente,  $\sum_{k=q}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} = \sum_{k=q}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{q} \binom{p-q}{k-q}$ . Le premier coefficient binomial ne dépendant pas de  $k$ , on peut le sortir de la somme. On va par ailleurs effectuer le changement d'indice  $j = k - q$  pour se ramener à  $\binom{p}{q} \sum_{j=0}^{j=p-q} (-1)^{j+q} \binom{p-q}{j} = \binom{p}{q} \sum_{j=0}^{j=p-q} \binom{p-q}{j} 1^j (-1)^{j+q}$ . Comme  $(-1)^{j+q} = (-1)^{j+q-2j} = (-1)^{q-j}$ , on peut reconnaître dans la somme une formule du binôme de Newton égale à  $(1-1)^{p-q} = 0$ , d'où la nullité de la somme initiale.

5. Il faut choisir les  $j$  valeurs qui seront prises par notre application (il y a pour cela  $\binom{p}{j}$  choix), et il reste ensuite à choisir une application surjective d'un ensemble à  $n$  éléments vers un ensemble à  $j$  éléments, ce pour quoi on a par définition  $S_{n,j}$  possibilités. Les applications prenant exactement  $j$  valeurs sont donc au nombre de  $\binom{p}{j} S_{n,j}$ .

6. Il y a au total  $p^n$  applications de  $\{1, 2, \dots, n\}$  vers  $\{1, 2, \dots, p\}$ , et chacune d'elle prend un nombre de valeurs compris entre 1 et  $p$ . En sommant les expressions obtenues à la question précédente pour  $j$  variant de 1 à  $p$ , on obtiendra donc  $p^n$  (on ne compte manifestement pas deux fois une même application).

7. Tentons donc de calculer la somme de droite, en inversant la somme double qui apparaît dès que possible :

$$(-1)^p \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n = (-1)^p \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} \sum_{j=1}^{j=k} \binom{k}{j} S_{n,j} = (-1)^p \sum_{j=1}^{j=p} S_{n,j} \sum_{k=j}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{j}$$

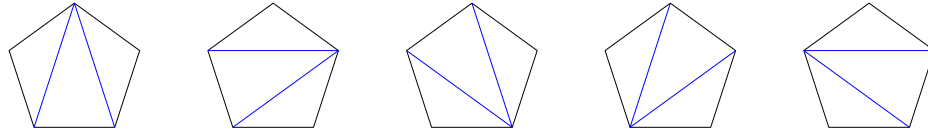
La somme de droite est justement celle dont on a montré qu'elle était nulle pour toutes les valeurs de  $j$  inférieures ou égales à  $p-1$ . Le seul terme restant est donc  $(-1)^p S_{n,p} \sum_{k=p}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{p} = (-1)^{2p} S_{n,p} = S_{n,p}$ . L'égalité demandée est donc prouvée.

### Problème 3 (\*\*\*\*)

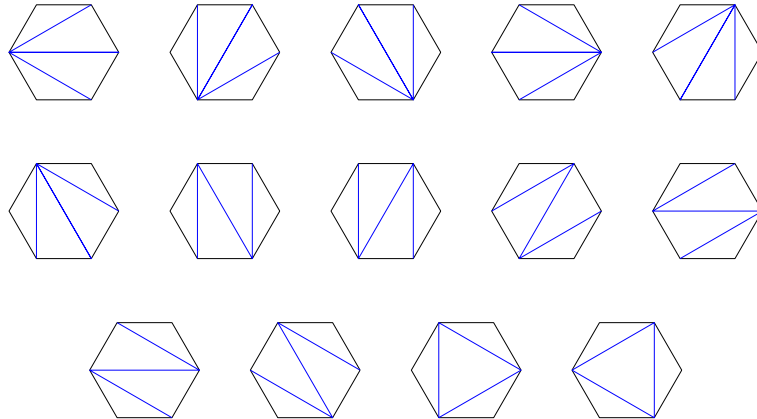
#### I. Triangulations de polygônes.

1. Il n'y a qu'une seule façon de trianguler un triangle, c'est de ne rien faire ! On en déduit que  $t_1 = 1$ . Pour un carré, deux possibilités, on peut le découper suivant l'une ou l'autre des deux

diagonales, ce qui donne  $t_2 = 2$ . Pour les pentagones, autant faire une jolie petite liste de dessins, il doit y en avoir cinq :



2. Eh bien voila, en tentant de trier dans un ordre plus ou moins logique :



3. Une fois le triangle  $A_1A_iA_{n+3}$  imposé, il reste à découper en triangles les deux polygones qui sont de part et d'autre de ce triangle. Le premier a pour sommets  $A_1, A_2, \dots, A_i$ , soit  $i$  sommets, donc peut être triangulé de  $t_{i-2}$  façons. Le deuxième a pour sommets  $A_i, A_{i+1}, \dots, A_{n+3}$ , soit  $(n+3) - i + 1 = n - i + 4$  sommets, donc peut être triangulé de  $t_{n+2-i}$  façons. Les deux triangulations se faisant indépendamment l'une de l'autre, il y a au total  $t_{i-2}t_{n-(i-2)}$  triangulations de notre polygone initial contenant le triangle  $A_1A_iA_{n+3}$ .

4. Il y a par définition  $t_{n+1}$  triangulations pour le polygone considéré à  $n+3$  sommets. Chacune de ces triangulations contient exactement un triangle du type  $A_1A_iA_{n+3}$ , avec  $i \in 2, \dots, n+2$  donc il suffit pour obtenir le nombre total de triangulations du polygone d'additionner les nombres obtenus à la question précédente pour toutes les valeurs possibles de  $i$ . Autrement

dit,  $t_{n+1} = \sum_{i=2}^{i=n+2} c_{i-2}c_{n-(i-2)}$ . Un petit décalage d'indice ramène à la formule nettement plus

lisible  $t_{n+1} = \sum_{i=0}^n t_i t_{n-i}$ .

5. On calcule successivement  $t_1 = t_0 = 1$ , puis  $t_2 = t_0t_1 + t_1t_0 = 1 + 1 = 2$ ;  $t_3 = t_0t_2 + t_1^2 + t_2t_0 = 2 \times 2 + 1 = 5$ ;  $t_4 = 2t_0t_3 + 2t_1t_2 = 2 \times 5 + 2 \times 2 = 14$ . Jusque là on retrouve bien les valeurs constatées. Continuons donc :  $t_5 = 2t_0t_4 + 2t_1t_3 + t_2^2 = 2 \times 14 + 2 \times 5 + 2^2 = 42$ ; et  $t_6 = 2t_0t_5 + 2t_1t_4 + 2t_2t_3 = 2 \times 42 + 2 \times 14 + 2 \times 5 \times 2 = 132$ .

## II. Une formule explicite.

1. Calculons donc :  $c_0 = \frac{1}{1} \times \binom{0}{0} = 1$ ;  $c_1 = \frac{1}{2} \times \binom{2}{1} = 1$ ;  $c_2 = \frac{1}{3} \times \binom{4}{2} = 2$ ; et  $c_3 = \frac{1}{4} \times \binom{6}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 5$ .

2. C'est un simple calcul :  $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+1}{n+2} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \times \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{2(2n+1)}{n+2} = \frac{4n+2}{n+2}$ .
3. Encore du calcul sans grand intérêt :  $\frac{1}{n} \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = c_n$  ;  
 $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!(n+1) - (2n)!n}{(n+1)!n!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = c_n$  ; et  
enfin  $\frac{2}{n+1} \binom{2n-1}{n} = \frac{2(2n-1)!}{(n+1)n!(n-1)!} = \frac{2n(2n-1)!}{(n+1)!n(n-1)!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = c_n$ .
4. C'est complètement évident au vu de la deuxième formule obtenue à la question précédente (une différence de deux coefficients binômiaux est certainement un nombre entier).
5. (a) Commençons par l'inégalité de gauche : en élevant le tout au carré et en utilisant le calcul de la question 3, il faut donc prouver que  $\frac{16n^3}{(n+1)^3} \leq \frac{4(2n+1)^2}{(n+2)^2}$ , soit encore  $4n^3(n+2)^2 \leq (2n+1)^2(n+1)^3$ . On passe tout à droite et on fait la différence :  $(4n^2 + 4n + 1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 4n^3(n^2 + 4n + 4) = 4n^5 + 16n^4 + 25n^3 + 19n^2 + 7n + 1 - 4n^5 - 16n^4 - 16n^3 = 9n^3 + 19n^2 + 7n + 1$  qui est clairement positif, ce qui prouve l'inégalité de gauche. Passons à celle de droite, qui se ramène plus simplement à  $\frac{4(2n+1)^2}{(n+2)^2} \leq \frac{16(n+1)^3}{(n+2)^3}$ , soit  $(2n+1)^2(n+2) \leq 4(n+1)^3$ . On met une fois de plus tout à droite :  $4(n+1)^3 - (4n^2 + 4n + 1)(n+2) = 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4 - 4n^3 - 12n^2 - 9n - 2 = 3n + 2 > 0$ , ce qui prouve la deuxième partie de l'encadrement.
- (b) Tous les nombres présents dans l'encadrement précédent sont positifs, on peut les multiplier entre eux sans difficulté, faisons-le lorsque  $k$  varie entre 1 et  $n-1$  pour obtenir  $\prod_{k=1}^{n-1} 4 \left( \frac{n}{n+1} \right)^{\frac{3}{2}} \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq \prod_{k=1}^{n-1} 4 \left( \frac{k+1}{k+2} \right)^{\frac{3}{2}}$ . Le terme du milieu se télescope pour donner  $\frac{c_{n-1+1}}{c_1} = c_n$ . Dans celui de gauche, les facteurs 4 donnent un  $4^{n-1}$  puisqu'il y a  $n-1$  termes dans le produit, et les puissances  $\frac{3}{2}$  se telescotent pour laisser  $\frac{1^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ , ce qui prouve exactement l'inégalité de gauche. À droite, on aura également un  $4^{n-1}$ , et les puissances donnent  $\frac{2^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$ . Or,  $(n+1)^{\frac{3}{2}} \geq n\sqrt{n}$ , et  $2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} \leq 3$ , donc  $\frac{2^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{3}{n\sqrt{n}}$ , ce qui permet de conclure à l'encadrement souhaité.
6. (a) Utilisons donc l'indice généreusement donné par l'énoncé : en posant  $i = n - k$ , on obtient  $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} k c_k c_{n-k} = \sum_{i=0}^{i=n} (n-i) c_{n-i} c_i = \sum_{i=0}^{i=n} n c_i c_{n-i} - \sum_{i=0}^{i=n} i c_i c_{n-i} = n S_n - T_n$ . On a donc  $T_n = n S_n - T_n$ , soit  $2T_n = S_n$  et donc  $T_n = \frac{n}{2} S_n$ .
- (b) Partons plutôt du membre de droite, et utilisons le résultat de la question 3 en l'écrivant sous la forme  $(4k+2)c_k = (k+2)c_{k+1}$  :  $4T_n + 3S_n = 4 \sum_{k=0}^{k=n} k c_k c_{n-k} + 3 \sum_{k=0}^{k=n} c_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} (4k+3) c_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} (4k+2) c_k c_{n-k} + \sum_{k=0}^{k=n} c_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} (k+2) c_{k+1} c_{n-k} + S_n$ . Faisons maintenant un petit changement d'indice en posant  $i = k + 1$  dans la première somme, et on a  $4T_n + 3S_n = \sum_{i=1}^{i=n+1} (i+1) c_i c_{n+1-i} + S_n = \sum_{i=0}^{i=n+1} (i+1) c_i c_{n+1-i} - c_0 c_{n+1} + S_n$ .

Or,  $c_0 = 1$ , donc  $c_0 c_{n+1} = c_{n+1}$  qui, par hypothèse est égal à  $S_n$ . Il nous reste donc  $4T_n + 3S_n = \sum_{i=0}^{i=n+1} (i+1)c_i c_{n+1-i} = \sum_{i=0}^{i=n+1} i c_i c_{n+1-i} + \sum_{i=0}^{i=n+1} c_i c_{n+1-i} = T_{n+1} + S_{n+1}$ , et la formule est démontrée.

- (c) Au rang 0, le résultat est vrai :  $S_0 = 1 = c_1$ . Supposant maintenant le résultat vrai au rang  $n$ , et combinons les résultats des questions *a* et *b* pour trouver  $\frac{n+1}{2}S_{n+1} + S_{n+1} = 4 \times \frac{n}{2}S_n + 3S_n$ , soit (en multipliant tout par 2)  $(n+3)S_{n+1} = (4n+6)S_n$ . Autrement dit, en utilisant notre hypothèse de récurrence,  $S_{n+1} = \frac{4n+6}{n+3}c_{n+1}$ . Or, on sait en appliquant le résultat de la question 3 pour  $k = n+1$  que  $\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} = \frac{4(n+1)+2}{n+1+2} = \frac{4n+6}{n+3}$ . On en déduit que  $S_{n+1} = c_{n+2}$ , ce qui prouve  $\mathcal{P}(n+1)$  et achève la récurrence.
- (d) On peut encore une fois procéder par récurrence, mais il faut faire une récurrence forte. Au rang 0, on sait que  $t_0 = c_0 = 1$ . Supposons donc les égalités vérifiées jusqu'à un certain entier  $n$ . On a alors  $\sum_{k=0}^{k=n} c_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} t_k t_{n-k}$ , puisque les termes apparaissant dans les deux sommes sont les mêmes par hypothèse de récurrence. On en déduit que  $t_{n+1} = c_{n+1}$ , ce qui achève la récurrence.

### III. Le retour du dénombrement.

1. (a) Assez clairement,  $\delta_{n,0} = 1$  puisqu'on ne peut se rendre en un point situé sur l'axe des abscisses qu'en se déplaçant toujours vers la droite. Et  $\delta_{n,m} = 0$  si  $n > m$  puisque le point est situé au-dessus de  $\Delta$ .
- (b) Pour atteindre le point  $(n,n)$ , le dernier déplacement effectué sera nécessairement un déplacement vers le haut (sinon, on viendrait d'un point qui n'est pas en-dessous de  $\Delta$ ), c'est-à-dire un déplacement venant compléter un début de chemin menant au point  $(n, n-1)$ . Réciproquement, tout chemin menant à  $(n, n-1)$  se complète en un chemin menant à  $(n, n)$  en lui ajoutant un déplacement vers le haut. Il y a donc autant de chemins menant à  $(n, n-1)$  que de chemins menant à  $(n, n)$ , et  $\delta_{n,n} = \delta_{n,n-1}$ . Le principe est exactement le même pour la deuxième formule, mais en distinguant cette fois deux types de chemins : ceux pour lequel le dernier déplacement s'est effectué vers la droite (venant donc du point  $(n-1, m)$ ) et ceux ayant un dernier déplacement vers le haut (venant de  $(n, m-1)$ ). Les deux catégories de chemins formant des ensembles disjoints, l'égalité en découle (on considérera évidemment que  $\delta_{n,m-1} = 0$  si  $m = 0$ ).
- (c) D'après la question précédente,  $\delta_{n,1} = \delta_{n-1,1} + \delta_{n,0} = \delta_{n-1,1} + 1$ . Autrement dit, la suite  $(\delta_{n,1})$  est arithmétique de raison 1, et comme  $\delta_{1,1} = 1$  (un seul chemin possible : un pas vers la droite puis un vers le haut), on trouve  $\delta_{n,1} = n$ . On procède de même pour le deuxième calcul :  $\delta_{n,2} = \delta_{n-1,2} + \delta_{n,1} = \delta_{n-1,2} + n$ . Là encore, il nous faut une initialisation :  $\delta_{2,2} = \delta_{2,1} = 2$  en utilisant la première relation du *b*. On en déduit que  $\delta_{n,2} = 2 + \sum_{k=3}^n k = 2 + \frac{n(n+1)}{2} - 1 - 2 = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2 + n - 2}{2} = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$ .
- (d) Tout se calcule sans difficulté à l'aide des relations de la question *b* :

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
$n = 0$	1						
$n = 1$	1	1					
$n = 2$	1	2	2				
$n = 3$	1	3	5	5			
$n = 4$	1	4	9	14	14		
$n = 5$	1	5	14	28	42	42	
$n = 6$	1	6	20	48	90	132	132

On remarque que les valeurs diagonales ressemblent vraiment étrangement aux premiers termes de la suite  $(c_n)$ .

2. (a) Il faut quand même réussir à faire varier  $n$  et  $m$  simultanément. Au rang  $n = 0$ , la seule valeur possible de  $m$  est 0, et  $\frac{n-0+1}{n+1} \binom{n+0}{n} = 1 = \delta_{0,0}$  donc ça va. Supposons les formules vraies pour un certain entier  $n$ , pour toutes les valeurs de  $m$  inférieures ou égales à  $n$ , et tentons de les prouver au rang  $n+1$ . Pour cela, on va procéder par récurrence sur  $m$ , pour  $m$  variant entre 0 et  $n+1$ . Pour  $m = 0$ , on a  $\frac{n+1-0+1}{n+1+1} \binom{n+1+0}{n+1} = 1 = \delta_{n+1,0}$ , la formule est correcte. Supposons maintenant la formule vérifiée pour  $\delta_{n+1,m}$ , alors  $\delta_{n+1,m+1} = \delta_{n,m+1} + \delta_{n+1,m}$ . On utilise simultanément les hypothèses de récurrence de la « grande » récurrence et de la « petite » récurrence pour remplacer :

$$\begin{aligned}
\delta_{n+1,m+1} &= \frac{n-m}{n+1} \binom{n+1+m}{n} + \frac{n+2-m}{n+2} \binom{n+1+m}{n+1} \\
&= \frac{(n-m)(n+m+1)!}{(n+1)n!(m+1)!} + \frac{(n+2-m)(n+m+1)!}{(n+2)(n+1)!m!} \\
&= \frac{(n+m+1)!}{(n+1)!(m+1)!} \left( n-m + \frac{(n+2-m)(m+1)}{n+2} \right) \\
&= \frac{(n+m+1)!}{(n+1)!(m+1)!} \times \frac{n^2 + 2n - nm - 2m + nm + n + 2m + 2 - m^2 - m}{n+2} \\
&= \frac{(n+m+1)!}{(n+1)!(m+1)!} \times \frac{n^2 + 3n - m^2 - m + 2}{n+2}. \text{ On devrait obtenir pour achever la récurrence } \frac{n-m+1}{n+2} \frac{(n+m+2)!}{(n+1)!(m+1)!} = \frac{(n+m+1)!}{(n+1)!(m+1)!} \times \frac{(n-m+1)(n+m+2)}{n+2}. \text{ Le numérateur de la deuxième fraction vaut } n^2 + nm + 2n - mn - m^2 - 2m + n + m + 2 = n^2 + 3n - m^2 - m + 2. \text{ Oh, miracle, ça marche !}
\end{aligned}$$

- (b) Remplaçons donc  $m$  par  $n$  dans la formule obtenue :

$$\delta_{n,n} = \frac{n-n+1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = c_n.$$

3. (a) Un tel chemin commence forcément par un pas vers la droite et achève par un pas vers le haut. Entre deux, on effectue un déplacement du point  $(1,0)$  au point  $(n,n-1)$ , le tout sans passer au-dessus de la droite d'équation  $y = x - 1$  puisqu'on ne veut pas croiser  $\Delta$ . Quitte à décaler notre repère d'une unité vers la gauche, ces chemins sont les mêmes que ceux menant de l'origine au point  $(n-1, n-1)$  sans passer au-dessus de  $\Delta$ , qui sont par définition en nombre égal à  $\delta_{n-1,n-1} = c_{n-1}$ .
- (b) Un tel chemin est composé de deux morceaux : un premier morceau menant de  $(0,0)$  à  $(k,k)$  sans retoucher la diagonale (on vient de voir qu'il y en a  $c_{k-1}$ ) puis un second morceau menant de  $(k,k)$  vers  $(n,n)$  en restant simplement en-dessous de  $\Delta$  mais en pouvant la croiser, ce qui est exactement équivalent à partir de l'origine et aller jusqu'à  $(n-k, n-k)$  en restant en-dessous de  $\Delta$  (on décale cette fois de  $k$  unités sur la diagonale). Il y a donc  $c_{n-k}$  chemins possibles pour la seconde moitié du parcours. Les choix des deux moitiés étant complètement indépendants, on a au total  $c_{k-1}c_{n-k}$  possibilités.



- (c) On peut partitionner l'ensemble des chemins selon leur premier point de rencontre avec  $\Delta$  (en faisant une catégorie supplémentaire pour ceux qui ne recroisent pas  $\Delta$ ). On obtient bien tous les chemins ainsi, et comptés une seule fois chacun (puisque le premier point de contact avec  $\Delta$  est certainement unique). La somme des nombres de chemins correspondants donnera alors  $\delta_{n,n}$ . Autrement dit,  $\delta_{n,n} = \sum_{k=1}^{n-1} c_{k-1}c_{n-k} + c_{n-1}$ . Comme  $c_0 = 1$ , on peut écrire le terme isolé sous la forme  $c_0c_{n-1}$  et l'intégrer à la somme pour obtenir exactement la formule souhaitée.