Feuilles d'exercices n° 5 : Techniques de calcul algébrique.

MPSI Lycée Camille Jullian

11 octobre 2022

Exercice 1 (***)

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geqslant 4$, $2^n \leqslant n!$
2. $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$
3. Le nombre de diagonales dans un polygône à n côtés est $\dfrac{n(n-3)}{2}$.
4. La dérivée n-ème de la fonction $f : x \mapsto (x-1)e^{-x}$ est donnée par $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$.
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Exercice 2 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 3 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$.

Exercice 4 (***)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 5 (*)

Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{12}$
2. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{10}{1\ 024}$
3. $S_3 = a + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^3}{3} + \cdots + \dfrac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

Exercice 6 (** à ***)

Calculer les sommes suivantes :

- $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)$
- $\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k$
- $\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k}$
- $\sum_{k=1000}^{k=2021} 3$
- $\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1)$
- $\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2$
- $\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1)$
- $\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k}$
- $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$

Exercice 7 (**)

Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k \geqslant 2$, $\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

Exercice 8 (**)

Il s'agit d'une méthode alternative à celle du cours pour calculer la sommes des carrés d'entiers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3$.
2. En développant $(k+1)^3$, exprimer $\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3$ à l'aide de sommes classiques.
3. En comparant les deux calculs précédents, retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

Exercice 9 (***)

Calculer les sommes doubles suivantes :

- $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$
- $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$
- $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$
- $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$
- $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i2^j$

Exercice 10 (**)

Calculer les produits suivants :

- $\prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$
- $\prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
- $\prod_{k=1}^{k=n}(6k-3)$
- $\prod_{k=1}^{n} \sqrt{k^2+k}$
- $\prod_{k=1}^{n} \frac{4^k}{k^2}$
- $\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x^{i+j}$

Exercice 11 (***)

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3$ de trois façons différentes.

1. Écrire S_n sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.

3. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).
4. Calculer T_n et U_n.
5. Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.
6. Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

Exercice 12 (***)

1. Montrer que, si $k \geqslant 2$, $1 + \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.
2. En déduire que $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leqslant 4$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. Expliquer pourquoi la notation $\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ a un sens, et ce qu'on peut affirmer sur la valeur d'un tel produit.
4. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}$.

Exercice 13 (*)

Développer les expressions suivantes : $(x-3)^5$, $(2x+3y)^3$ et $(x-1)^7$.

Exercice 14 (***)

Donner une expression simple des sommes $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ (pour les deux dernières, on peut partir de la formule du binome appliquée à $(1+x)^n$, où x est un réel quelconque, ou simplement exploiter la formule sans nom).

Exercice 15 (*)

Soient p, q et n trois entiers tels que $p + q + 2 \leqslant n$. Montrer que $\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2} = pq$.

Exercice 16 (***)

On fixe pour tout l'exercice un entier naturel $p \geqslant 1$.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant p$, $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ (on pourra procéder par récurrence sur n).
2. Redémontrer la formule précédente directement, à l'aide d'un calcul de somme télescopique (pensez à la relation de Pascal).
3. Déduire de la formule démontrée la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k$ et celle de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 17 (**)

Résoudre chacun des systèmes suivants, en distinguant éventuellement des cas suivants les valeurs des paramètres :

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -x & - & 3y & + & 5z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & -1 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & a \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & m^2 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 18 (**)

On considère l'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, x+3y+2z, -3x+2y+3z) \end{array}\right.$. Montrer que f est une application bijective, et déterminer sa réciproque. Effectuer ensuite le même travail pour g : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+3y+z, -x+2y+3z, x+2y) \end{array}\right.$.

Exercice 19 (***)

Cet exercice propose une nouvelle méthode de calcul de la somme classique $\sum_{k=1}^{n} k^3$, méthode que l'on étendra ensuite à la somme $\sum_{k=1}^{n} k^4$ pour laquelle nous n'avons pas vu de formule en cours.

1. Déterminer un polynôme P du quatrième degré vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = x^3$.
2. Comment peut-on exprimer de façon plus simple la somme $\sum_{k=0}^{n} P(k+1) - P(k)$? (question totalement indépendante de la précédente, qui ne nécessite pas de connaitre les coefficients du polynôme P)
3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = P(n+1)$, puis conclure (on s'arrangera bien sûr pour retrouver la forme factorisée bien connue pour cette somme).
4. En utilisant la même méthode que ci-dessus, montrer que $\sum_{k=0}^{n} k^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.
5. Redémontrer cette dernière formule par récurrence.

Exercice 20 (**)

Déterminer la valeur de $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k}\binom{k}{n}$.

Problème : autour d'inégalités célèbres (***)

1. Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ deux listes constituées de réels qui sont tous strictement positifs.
   (a) En posant $f(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2$, expliquer pourquoi f est un polynôme de degré 2.
   (b) Calculer le discriminant du polynôme précédent. Que peut-on dire de son signe ?
   (c) En déduire l'**inégalité de Cauchy-Schwartz** : $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$
   (d) Vérifier que l'inégalité est en fait une égalité si $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $b_k = a_k$. Déterminer ensuite une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité de Cauchy-Schwartz soit une égalité.
2. On garde les mêmes hypothèses que dans la question précédente et on pose $m = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{a_k}{b_k}$ et $M = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{a_k}{b_k}$.
   (a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + mM \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant (m + M) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.
   (b) Montrer que, si x et y sont deux réels positifs, $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$.
   (c) En déduire que $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \leqslant \frac{m+M}{2\sqrt{mM}} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ (sorte de « retournement » de l'inégalité de Cauchy-Schwartz).
3. On ne considère maintenant plus qu'une série de réels strictement positifs $(c_1, c_2, \dots, c_n)$.
   (a) Montrer que, si $k \leqslant n$, on a $\sum_{i=1}^{k} c_i \times \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{c_i} \geqslant \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ (on a bien sûr le droit d'utiliser les questions précédentes).
   (b) En déduire l'inégalité $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{c_1 + c_2 + \cdots + c_k} \leqslant 4 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{c_i} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}$.
   (c) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$.
   (d) En déduire que $\sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2i^2}$.
   (e) Conclure en démontrant l'**inégalité de Hardy** : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{c_1 + c_2 + \cdots + c_k} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k}$.
   (f) Que donne cette inégalité lorsque tous les nombres c_i sont égaux ?
   (g) En admettant que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, montrer qu'on ne peut pas obtenir une meilleure constante que le 2 à droite de l'inégalité de Hardy (on pourra poser $c_k = k$ et regarder ce qui se passe quand on fait grandir la valeur de n).