Feuille d'exercices n° 2 : corrigé.

MPSI Lycée Camille Jullian

9 septembre 2022

Exercice 1 (*)

C'est un exercice qui ressemble énormément à celui vu en cours. Les résultats sont d'ailleurs exactement les mêmes :

- l'application f est injective : si n et n' sont deux entiers naturels, alors $n^2 = n'^2 \Rightarrow n = n'$ puisque les deux nombres sont positifs. Par contre, f n'est pas surjective, 3 par exemple n'a ancun antécédent entier par la fonction carré.
- l'application g, au contraire, n'est pas injective (par exemple, $g(2) = g(3) = 1$) mais elle est surjective : tout entier n admet n^2 comme antécédent évident (puisque $\sqrt{n^2} = n$, la partie entière n'y changera rien).
- l'application $f \circ g$ ne peut pas être injective puisque g ne l'est pas (même contre-exemple : $f \circ g(2) = f \circ g(3) = 1$), mais elle ne peut pas non plus être surjective car f ne l'est pas : 3 n'a pas plus d'antécédent par $f \circ g$ que par f puisqu'il n'est de toute façon le carré d'aucun entier.
- l'application $g \circ f$ est bijective, puisqu'on a manifestement $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 2 (**)

- L'application f_1 est injective puisque, si n et p sont deux entiers naturels, $n+5 = p+5 \Rightarrow n = p$ (ce serait d'ailleurs tout aussi vrai avec des réels quelconques), mais pas surjective car 0 par exemple n'a pas d'antécédent par f_1 (si l'application était définie sur $\mathbb{R}$ ou même sur $\mathbb{Z}$, 0 aurait évidemment pour antécédent -5, mais en tant qu'application de $\mathbb{N}$ dans lui-même, elle n'est pas surjective).
- L'application f_2 est injective : en effet, $n^2 = p^2 \Rightarrow n = p$ quand n et p sont positifs (si vous préférez, on peut dire qua l'application carré est injective sur $\mathbb{R}^+$, donc a fortiori sur $\mathbb{N}$. Par contre, elle n'est pas surjective, 2 par exemple n'ayant pas d'antécédent par f_2 (il aurait deux antécédents dans $\mathbb{R}$, à savoir $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, mais ces nombres ne sont pas vraiment entiers).
- L'application f_3 est un peu plus pénible à étudier que les autres mais elle est en fait bijective. Les entiers pairs sont envoyés sur les entiers impairs et veci-versa donc un entier pair ne peut pas avoir la même image qu'un entier impair. Comme la restriction de f_3 aux entiers pairs, et celle aux entiers impairs, sont facilement injectives, f_3 est injective. Elle est également surjective car si p est pair, $p+1$ est un antécédent de p, et si p est impair, c'est $p-1$ qui marche. En fait, on peut faire plus rapide en prouvant que f_3 est bijective et que sa réciproque est f_3 elle-même (on parle alors d'application **involutive**). En effet, si n est pair, $f_3(n) = n+1$ est un nombre impair, donc $f_3(f_3(n)) = f_3(n+1) = n+1-1 = n$. De même, si n est impair, $n-1$ est pair, donc $f_3(f_3(n)) = f_3(n-1) = n-1+1 = n$. Dans tous les cas, $f_3(f_3(n)) = n$, ce qui signifie bien que $f_3^{-1} = f_3$ (et au passage que f_3 est bijective).
- L'application f_4 n'est pas surjective car 1 et 2 ont par exemple la même image. Par contre, elle est surjective, $3p$ étant toujours un antécédent de p (il n'est pas très compliqué de constater que chaque entier a en fait exactement trois antécédents par f_4, qui sont $3p$, $3p+1$ et $3p+2$).

- Cette dernière application n'est pas injective, 3 et 17 ayant par exemple la même image. Par contre, elle est surjective car $p+10$ est toujours un antécédent de p.

Exercice 3 (**)

1. On reconnait bien sûr la fonction usuelle th ! Ah non pardon, on ne l'a pas encore étudiée ensemble. Pas grave, nous allons de toute façon étudier l'injectivité et la sujectivité de f « à la main », en revenant aux définitions (pour une utilisartion de l'étude de cette fonction, attendez le cours du chapitre 3 sur le sujet). Supposons que, pour deux réels x et x', on ait $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{x'} - e^{-x'}}{e^{x'} + e^{-x'}}$. En faisant le produit en croix et en développant tout brutalement, on obtient $e^{x+x'} + e^{x-x'} - e^{x'-x} - e^{-x-x'} = e^{x+x'} + e^{x'-x} - e^{x-x'} - e^{-x-x'}$, soit encore en simplifiant $2e^{x-x'} = 2e^{x'-x}$. La fonction exponentielle étant bijective, cela implique $x - x' = x' - x$, soit $2x = 2x'$ et donc $x = x'$. Conclusion : l'application f est injective.
   Pour la surjectivité, on peut aussi s'en sortir de façon élémentaire en cherchant quelles sont les valeurs de y pour lesquelles l'équation $f(x) = y$ admet (au moins) une solution. Ici, il faut donc tenter de résoudre l'équation $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$, soit $e^x - e^{-x} = ye^x + ye^{-x}$. En regroupant différemment, on trouve $e^x(1-y) = e^{-x}(1+y)$, ou encore $e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$. il est déjà évident que la fonction n'est pas surjective puisque $y = 1$ ne peut pas avoir d'antécédent, l'équation étant alors impossible. Mais on peut dire beaucoup mieux : l'équation a une solution si et seulement si $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$, c'est-à-dire $y \in]-1, 1[$, et on peut alors écrire $x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$. Autrement, l'application f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$, et de réciproque $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.
2. La fonction g est évidemment définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 3x^2+1$, strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective. De plus, le limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ sont respectivement égales à $+\infty$ et $-\infty$ (ce sont les mêmes que celles de $x \mapsto x^3$), donc la fonction prend toutes les valeurs réelles. Autrement dit, g est surjective et injective, c'est-à-dire bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Commençons par déterminer l'ensemble de définition de h. Le trinôme $x^2 - x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Le trinôme étant positif à l'extérieur de ses racines, $\mathcal{D}_h = E$. Sur cet ensemble (ou presque, la fonction n'est pas dérivable en -1 ni en 2), h a pour dérivée $h'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$. Cette dérivée est du signe de $2x - 1$, donc positive si $x \geqslant 2$ et négative si $x \leqslant -1$. La fonction h est donc décroissante sur $]-\infty, -1]$ et croissante sur $[2, +\infty[$. Les images de -1 et 2 par h sont toutes les deux nulles. Quant aux limites à l'infini, elles sont toutes les deux égales à $+\infty$ puisque le trinôme à l'intérieur de la racine tend vers $+\infty$ des deux côtés. La fonction h est donc surjective sur $\mathbb{R}^+$ (tous les réels positifs ont bien des antécédents pas la fonction), mais pas injective pusique par exemple $g(-1) = g(2) = 0$. En fait, tout réel positif a exactement deux antécédents par h, un dans l'intervalle $]-\infty, -1]$ et un autre dans l'intervalle $[2, +\infty[$.
4. La fonction i est bien dérivable sur l'ensemble E, et sa dérivée vaut $\dfrac{3(x-1) - (3x+2)}{(x-1)^2} = \dfrac{-5}{(x-1)^2}$. Cette dérivée est négative partout où elle existe, la fonction i est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. On ne peut bien sûr PAS en déduire que i est injective sur E car celui-ci est constitué de deux intervalle disjoints. Calculons donc les limites de i. Du côté des infinis, on prend le quotient des termes de plus haut degré, ce qui donne pour limite 3 à chaque fois. En 1, le numérateur tend vers 5, et le dénominateur vers 0, en étant

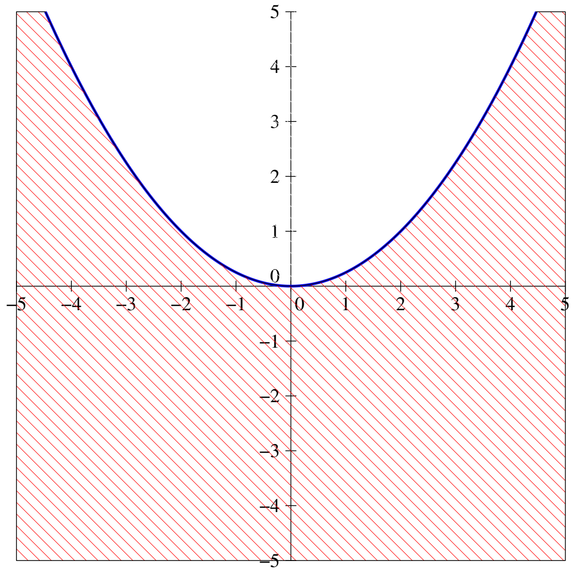
positif à droite et négatif à gauche de 1. Autrement dit, $\lim_{x\to 1^-} i(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 1^+} i(x) = +\infty$. Résumons tout ceci dans un beau tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
			$\Vert$ $+\infty$		
f	3	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	3
			$-\infty$ $\Vert$		

On peut constater que la fonction est injective puisqu'elle ne reprend jamais sur $]1, +\infty[$ une valeur déjà prise sur $]-\infty, 1[$ (et qu'elle est injective sur chaque intervalle puisque strictement décroissante). Elle est également surjective sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, puisque tous les réels de l'intervalle $]-\infty, 3[$ ont un antécédent dans $]-\infty; 1[$, et tous les réels de l'intervalle $]3, +\infty[$ ont un antécédent dans $]1, +\infty[$. Conclusion, la fonction i réalise une bijection de E vers F.

Exercice 4 (***)

1. Déterminer les antécédents de $(4, 4)$ revient à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 4 \\ xy & = & 4 \end{array}\right.$. On procède par substitution : $y = 4 - x$, donc $x(4 - x) = 4$, soit $x^2 - 4x + 4 = 0$. On reconnait une identité remarquable : $(x - 2)^2 = 0$, donc $x = 2$, puis $y = 4 - 2 = 2$. Autrement dit, $(4, 4)$ possède pour unique antécédent le couple $(2, 2)$. Même méthode pour les antécédents de $(1, 1)$: $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ xy & = & 1 \end{array}\right.$, on susbtitue $y = 1-x$ pour trouver $x(1-x) = 1$, donc $x^2-x+1 = 0$, équation qui a un discriminant strictement négatif et n'admet donc aucune racine réelle. Le couple $(1, 1)$ n'a donc aucun antécédent par la fonction f.
2. On sait déjà que f ne peut pas être surjective puisqu'on a vu que $(1, 1)$ n'avait pas d'antécédent par f. Elle n'est en fait pas injective non plus, puisque'on a manifestement toujours $f(x, y) = f(y, x)$. Par exemple, $f(1, 2) = f(2, 1) = (3, 2)$.
3. Noons plutôt (a, b) le couple dont on va chercher un antécédent, on utilise la même méthode qu'à la première question en écrivant le système $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ xy & = & b \end{array}\right.$. On substitue toujours $y = a - x$ pour obtenir $x(a - x) = b$, soit $x^2 - ax + b = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = a^2-4b$, et n'admet de solutions réelles que si $a^2-4b \geqslant 0$, ce qui est exactement la condition nécessaire et suffisante à l'existence d'antécédents par f pour le couple (a, b). L'ensemble correspond est simplement la zone du plan située en-dessous de la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{4}$, représentée ci-dessous (on peut constater que les points situés exactement sur la parabole sont ceux qui ont un seul antécédent par f, ceux qui sont strictement en-dessous en ont deux) :



4. Fixer un point sur une droite parallèle à l'axe des ordonnées revient à fixer la valeur a de l'abscisse, en laissant l'ordonnée variable. Autrement, on cherche les couples (x, y) solutions d'un système du type $\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & a \\ xy & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$, qui sont tous simplement tous les couples (x, y) vérifiant $x + y = a$, autrement dit les points de la droite d'équation $y = a - x$, qui constitue donc l'image réciproque recherchée.

   Au contraire, pour une droite parallèle à l'axe des ordonnées, c'est la valeur b de l'ordonnée qui est fixée, et on trouve du coup une équation du type $xy = b$ pour l'image réciproque de la droite, c'est-à-dire l'équation d'une hyperbole.

Exercice 5 (***)

1. Pour que l'application f soit injective, on doit avoir la condition ($X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$) implique $X = Y$. Autrement dit, un sous-ensemble de E doit être déterminé de façon unique par ses intersections avec les sous-ensembles A et B. Ce ne sera pas le cas si $A \cup B \neq E$. En effet, si cette condition n'est pas vérifiée, prenons $x \notin A \cup B$, et posons $X = \{x\}$ et $Y = \emptyset$. Comme $x \notin A$ et $x \notin B$, on aura $X \cap A = X \cap B = \emptyset$, donc $f(X) = f(Y)$, ce qui contredit l'injectivité de f.

   Réciproquement, supposons que $A \cup B = E$, et prouvons que f est injective. Pour cela, supposons que $f(X) = f(Y)$, c'est-à-dire que $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$. Prouvons à partir de ces hypothèses que $X = Y$. Pour cela, on procède classiquement par double inclusion. Soit $x \in X$. Comme X est une partie de E, $x \in E$, donc $x \in A \cup B$. On a donc soit $x \in A$, soit $x \in B$, dont on déduit $x \in X \cap A$, ou $x \in X \cap B$. Mais alors $x \in Y \cap A$ ou $x \in Y \cap B$, et dans les deux cas on peut conclure que $x \in Y$, ce qui prouve que $X \subset Y$. L'autre inclusion se démontre exactement de la même manière puisque X et Y jouent un rôle parfaitement symétrique dans nos hypothèses. On a donc $X = Y$, ce qui prouve l'injectivité de f.

2. Soient C et D deux ensembles tels que $C \subset A$ et $D \subset B$. Le couple (C, D) admet un antécédent par f s'il existe $X \subset E$ tel que $X \cap A = C$ et $X \cap B = D$. Cela sera le cas pour **tous** les couples possibles (C, D) seulement si $A \cap B = \emptyset$. En effet, supposons qu'il existe un élément x appartenant à la fois à A et à B, et posons $C = \{x\}$ (qui est bien un sous-ensemble de A) et $D = \emptyset$ (qui est certainement un sous-ensemble de B). Pour trouver un antécédent X du couple (C, D), on devrait avoir $X \cap A = \{x\}$, donc $x \in X$, mais en même temps $X \cap B = \emptyset$, donc $x \notin X$ (puisque par hypothèse $x \in B$). C'est manifestement impossible, la condition $A \cap B = \emptyset$ est donc nécessaire.

Vérifions qu'elle est suffisante : si $A \cap B = \emptyset$, un antécédent du couple (C, D) par f est simplement $X = C \cup D$. En effet, $(C \cup D) \cap A = (C \cap A) \cup (D \cap A)$. Or, $C \subset A$, donc $C \cap A = C$, et comme $A \cap B = \emptyset$, on aura a fortiori $D \cap A = \emptyset$ puisque $D \subset B$. Finalement, $X \cap A = C$, et on prouve symétriquement que $X \cap B = D$. Tout couple admet donc un antécédent par f, qui est bien une application surjective.

3. L'application f est bijective si et seulement si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire si $B = \overline{A}$. On a en fait déjà décrit la réciproque à la question précédente : $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \to & \mathcal{P}(E) \\ (C, D) & \mapsto & (C \cup D) \end{array} \right.$

Exercice 6 (**)

Supposons donc dans un premier temps que f est injective, et essayons de prouver qu'elle est surjective. Pour cela, prenons un élément $y \in E$ et essayons de lui trouver un antécédent. On sait par hypothèse que $f(f(f(y))) = f(y)$. Les deux éléments $f(f(y))$ et y ont donc la même image par f, ce qui implique, l'application étant injective, qu'ils sont égaux, c'est-à-dire que $f(f(y)) = y$. On vient de trouver un élément qui est un antécédent de y par f : c'est $f(y)$! En effet, $f(f(y)) = y$. L'application f est donc surjective.

Supposons désormais que l'application f est surjective, et essayons de prouver qu'elle est injective. Pour cela, considérons deux éléments x et x' dans E qui ont la même image par f. Comme f est surjective, ces deux éléments ont des antécédents, que nous nommerons z et z', par f. on a donc $f(f(z)) = f(x) = f(x') = f(f(z'))$. De même, z et z' ont des antécédents w et w' par f, qui vérifieront cette fois-ci $f(f(f(w))) = f(f(f(w')))$. mais, d'après l'énoncé, $f(f(f(w))) = f(w)$ et $f(f(f(w'))) = f(w')$. On en déduit donc que $f(w) = f(w')$, c'est-à-dire que $z = z'$. Mais alors on a certainement $f(z) = f(z')$, soit $x = x'$. On a bien prouvé l'injectivité de l'application.

Dans le cas où f est bijective, on peut composer la relation initiale par f^{-1} pour obtenir $f^{-1} \circ f \circ f \circ f = f^{-1} \circ f$, c'est-à-dire $f \circ f = id_E$. Cela signifie que f est alors sa propre réciproque (ce qui découle aussi du calcul effectué dans la première partie de la démonstration, où l'antécédent trouvé pour y n'est autre que son image par f).

Exercice 7 (**)

1. Un exemple suffit à se convaincre : posons $f(x) = x^2$ (avec $E = F = \mathbb{R}$) et $B = [-1, 1]$. On calcule alors $f^{-1}(B) = [-1, 1]$, puis $f(f^{-1}(B)) = [0, 1]$, qui est strictement inclus dans B. De façon générale, prouvons que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Si $y \in f(f^{-1}(B))$, alors $\exists x \in f^{-1}(B)$, tel que $y = f(x)$. Or, par définition, si $x \in f^{-1}(B)$, $f(x) \in B$, ce qui prouve ici que $y \in B$, et donc l'inclusion souhaitée.
2. Le problème manifeste sur l'exemple donné ci-dessus est la présence d'éléments dans l'ensemble $B = [-1, 1]$ n'ayant pas d'antécédent par f. L'inclusion sera en fait une égalité si f est surjective. Supposons-le et prouvons l'inclusion réciproque de celle prouvée à la première question. Soit $y \in B$, comme f est surjective, $\exists x \in E$ tel que $f(x) = y$. Par définition, $x \in f^{-1}(B)$, donc $f(x) \in f(f^{-1}(B))$, ce qui revient bien à dire que $y \in f(f^{-1}(B))$.
3. Commençons à nouveau par un exemple avec la fonction carré, en posant $A = [0, 1]$. On aura alors $f(A) = [0, 1]$, puis $f^{-1}(f(A)) = [-1, 1]$, ensemble dont A est un sous-ensemble. Prouvons que c'est toujours le cas. Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$, donc x est un antécédent d'un élément appartenant à $f(A)$, il appartient par définition à $f^{-1}(f(A))$.
4. Le problème est ici la présence éventuelle d'autres antécédents que ceux appartenant à A aux éléments de $f(A)$. Il suffit d'imposer l'injectivité de f pour ne plus avoir de souci : si f est injective et $x \in f^{-1}(f(A))$, alors x est un antécédent d'un élément de la forme $f(z)$, avec $z \in A$. Mais z étant lui-même un antécédent de $f(z)$, on a nécessairement $x = z$ (puisqu'on ne peut avoir deux antécédents différents pour une fonction injective), donc $x \in A$.

Exercice 8 (*)

1. La fonction $\mathbb{1}_A$ n'est sûrement pas injective puisque, par exemple, $\mathbb{1}_A(2) = \mathbb{1}_A(4) = 1$. Par contre, elle est surjective, car 1 et 0 ont chacun un bon paquet d'antécédents (tous les nombres entiers pairs et tous les impairs respectivement).
2. La fonction $\mathbb{1}_A$ n'est pas surjective dans deux cas : si 0 n'a pas d'antécédent, c'est-à-dire si $\mathbb{1}_A$ est l'application constante égale à 1 ; et si 1 n'a pas d'antécédent, c'est-à-dire si $\mathbb{1}_A$ est constante égale à 0. Cela revient à dire que $A = \mathbb{N}$ ou $A = \emptyset$.
3. Vérifions bêtement à la main : si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 1 = 1$. Dans tous les autres cas, on a soit $\mathbb{1}_A(x) = 0$, soit $\mathbb{1}_B(x) = 0$, donc $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0$. Cela prouve bien que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$. Pour la deuxième égalité, on peut par exemple vérifier au cas pas cas qu'on a toujours $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_{A\cup B}(x) + \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$. En effet, si x appartient aux deux ensembles, il appartient aussi à la réunion et à l'intersection, et on obtient $1+1 = 1+1$, ce qui est vrai. S'il n'appartient à aucun des deux, on trouve $0+0 = 0+0$. Et s'il appartient à un seul des deux ensembles, par exemple A, il appartiendra à l'union mais pas à l'intersection, et on aura cette fois-ci $1+0 = 1+0$, ce qui est toujours vrai. L'égalité est donc bien vérifiée.
4. On peut simplement écrire $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$, ce qui se démontre sans problème : si $x \in A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 0 = 1 - 1$, et si $x \notin A$, on a cette fois-ci $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 = 1 - 0$.
5. Puisque $A \backslash B = A \cap \overline{B}$, on peut écrire $\mathbb{1}_{A\backslash B} = \mathbb{1}_A \times (1 - \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$. Ensuite, en utilisant la première forme de la différence symétrique et le fait que $A \backslash B$ et $B \backslash A$ ont une intersection vide, on trouve alors $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_{A\backslash B} + \mathbb{1}_{B\backslash A} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$. Si on préfère passer par l'autre forme de la différence symétrique, $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_{A\cup B}(1 - \mathbb{1}_{A\cap B}) = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(1 - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B^2 + \mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B^2$. Comme $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B^2 = \mathbb{1}_B$ (élever au carré des 1 ou des 0 ne change rien), on retrouve la même formule.
6. Un sous-ensemble étant caractérisé par sa fonction indicatrice, il suffit de prouver que les fonctions indicatrices sont les mêmes. En effet, $\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\Delta C} - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$. L'expression obtenue étant invariante par permutation des ensembles A, B et C (si on remplace A par C et C par A, rien ne change), elle est égale à celle qu'on trouvera pour $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}$, ce qui prouve l'associativité.

Exercice 9 (*****)

1. Une application fort simple suffit à notre bonheur, celle qui à un entier naturel n associe son double $2n$. Il est assez évident que f est à valeurs dans l'ensemble des entiers pairs, qu'elle est injective et surjective vers cet ensemble, donc bijective.
2. Si vous avez bien compris le cas précédent, celui-ci parait relativement naturel, mais l'application est un peu plus difficile à construire. L'idée est, par exemple, d'envoyer les naturels pairs sur les entiers positifs, et les impairs sur les négatifs. Une façon de le faire est de poser $f(n) = \dfrac{n}{2}$ si n est pair, et $f(n) = -\dfrac{n+1}{2}$ si n est impair. Si n est pair, $f(n) \geqslant 0$, et si n est impair, $f(n) < 0$. Comme par ailleurs, $\dfrac{n}{2} = \dfrac{p}{2} \Rightarrow n = p$, et $-\dfrac{n+1}{2} = -\dfrac{p+1}{2} \Rightarrow n = p$, l'application f est injective. Ne reste plus qu'à prouver qu'elle est surjective : soit $p \in \mathbb{Z}$, si $p \geqslant 0$, $2p$ est un antécédent de p ; si $p < 0$, $-2p - 1$ est un antécédent de p. Finalement, f est bien bijective.
3. Ça se complique de plus en plus, alors plutôt que de vous donner une formule affreuse pour la bijection, je vais expliquer comment ça marche et j'espère que vous serez convaincus. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ peut être représenté sous forme d'un tableau à deux dimensions, et donner une bijection de $\mathbb{N}$ vers ce tableau revient en fait à numéroter les éléments de ce tableau (à partir de 0) en essayant de ne pas en oublier au passage. L'idée est de faire cette numérotation

diagonale par diagonale : on pose $f(0) = (0, 0)$, puis $f(1) = (0, 1)$ et $f(2) = (1, 0)$ (première diagonale), puis $f(3) = (0, 2)$, $f(4) = (1, 1)$ et $f(5) = (2, 0)$ etc. Le couple (p, q) se trouve sur la diagonale numéro $p + q$, il est même le $(p + 1)$ème élément de la diagonale avec la numérotation choisie, et on a déjà numéroté $1 + 2 + \cdots + (p + q)$ éléments sur les diagonales précédentes, soit $\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$ éléments. Autrement dit, on a $f(n) = (p, q)$ pour $n = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$ (on commence à numéroter à 0, ce qui explique qu'on ajoute p et pas $p+1$ à la fin). On a donc décrit la réciproque de la bijection f (je laisse les plus courageux vérifier que c'est bien une bijection).

4. En fait, l'idée est la même que pour $\mathbb{N}^2$ puisque $\mathbb{Q}$ est « plus petit » que $\mathbb{N}^2$: on peut toujours représenter un rationnel par un couple d'entiers (le numérateur et le dénominateur de la fraction) sauf qu'on impose en plus que la fraction en question ne soit pas simplifiable. Il suffit donc de reprendre le principe de la numérotation précédente, mais en sautant tous les couples correspondant à des fractions déjà numérotées (ainsi, on attribuera un numéro au couple $(1, 1)$ mais pas au couple $(2, 2)$, ni à $(3, 3)$ etc.). Trouver une formule explicite pour cette bijection est impossible, et justifier correctement que ça fonctionne bien est délicat. On se contentera donc de constater que trouver une application injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}^2$ est facile (on associe à tout élément de $\mathbb{Q}$, mis sous forme irréductible, le numérateur et le dénominateur de la fraction), et qu'en composant cette application avec les bijections déjà construites de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ et de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, on aura une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$, ce qui est suffisant d'après le théorème de Cantor-Bernstein démontré à l'exercice suivant.
5. Pour le fait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, il faut passer par un raisonnement par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une bijection f qui « numérote » tous les réels. Un réel peut s'écrire sous forme décimale, avec éventuellement une infinité de chiffres après la virgule (cette écriture pose en fait quelques problèmes théoriques que nous allons passer sous silence). Notons donc x_1 l'image de 0 par f, qui sera donc pour nous un nombre décimal, x_2 l'image de 1, x_3 l'image de 2 etc. Construisons désormais un nouveau nombre décimal x de la façon suivante : $x = 0, \dots$, en choisissant comme première décimale un chiffre différent de la première décimale de x_1 (on peut certainement, puisqu'il y a 10 chiffres possibles pour chaque décimale !), comme deuxième décimale un chiffre différent de la deuxième décimale de x_2, comme troisième décimale un chiffre différent de la troisième décimale de x_3 etc. Un tel nombre x est certainement différent de x_1 (ils ont au moins une décimale différente), de x_2, x_3, et de tous les x_i. Conclusion, ce nombre x n'a pas d'antécédent par f (il n'apparait nulle part dans notre liste numérotée), qui ne peut donc pas être surjective, et encore moins bijective, ce qui est absurde ! Cet argument est connu sous le nom de « diagonale de Cantor ».
6. On a vu à l'exercice 3 une bijection f de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$. Il suffit de poser $g(x) = \frac{1 + f(x)}{2}$ pour obtenir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$ (je vous laisse comprendre pourquoi).
7. Dessinez un demi-cercle sur une feuille, une droite un peu en-dessous, et placez le centre O du demi-cercle. On considère ensuite l'application suivante : à un point P du demi-cercle, on associe le point de la droite qui est sur la droite (OP). Il n'est pas très dur de se convaincre que cette application est bijective (en excluant les deux points extrêmes du demi-cercle).

Exercice 10 : théorème de Cantor-Bernstein (****)

1. Procédons par l'absurde et supposons qu'un élément y (on est dans l'ensemble Y) appartienne à la fois à A_i et à A_j, pour des valeurs distinctes de i et de j (par exemple $i < j$). Si $i = 0$, $y \in Y \backslash f(X)$, donc $Y \notin f(X)$. Or, si ce même y appartient à $A_j = \varphi(A_{j-1})$ (puisque $j > 0$), on a donc $y \in f \circ g(A_{i-1})$, qui est certainement inclus dans $f(X)$. Ce n'est pas possible. Le cas général est similaire : on a d'un côté $y \in A_i$, donc $y = \varphi^i(\alpha)$, avec $\alpha \in A_0$ (par construction des ensembles A_i), et d'autre part $y = \varphi^j(\beta)$, avec $\beta \in A_0$ également. Mais

alors $\varphi^i(\varphi^{j-i}(\beta)) = y = \varphi^i(\alpha)$. Or, l'application φ est injective (c'est la composée de deux injections) donc φ^i aussi. On peut alors affirmer que $\alpha = \varphi^{j-i}(\beta)$, ou si l'on préfère que $\alpha \in A_0 \cap A_{j-i}$. D'après ce qui précède, c'est impossible. Les ensembles sont donc tous disjoints.

2. Soit $y \in A$, il existe donc un entier n pour lequel $y \in A_n$, alors $\varphi(y) \in A_{n+1} \subset A$, donc $\varphi(A) \subset A$.
3. Comme $f(B) = \varphi(A)$, $f(B) \subset A$ d'après ce qui précède. Par ailleurs, $g(A_i) \subset B$, donc $\varphi(A_i) \subset f(B)$, soit $A_{i+1} \subset B$. Cela signifie que tous les ensembles A_i à l'exception de A_0 sont inclus dans $f(B)$, qui contient donc $A \backslash A_0$. Reste à prouver qu'un élément de A_0 ne peut pas appartenir à $f(B)$. C'est en fait évident pusique dans le cas contraire il serait dans $f(X)$. On a bien $f(B) = 1 \backslash A_0$.

   Par construction, tout élément de B est image d'un élément de A par g, la fin de la question est donc triviale (l'unicité découlant de l'injectivité de g).
4. L'application h est bien définie. Sa restriction à B est injective par construction (si $g^{-1}(x) = g^{-1}(x')$, alors $x = x'$ en appliquant g). Sa restriction à C est également injective puisqu'elle coïncide avec f. Reste à vérifier qu'un élément x de B et un élément x' de C ne peuvent pas avoir la même image par h. En effet, $h(x) = g^{-1}(x) \in A$ d'après la question précédente, et $h(x') = f(x') \notin A$ puisque A est le complémentaire de $f(X)$ dans Y. L'application h est donc injective. Elle est également surjective : tout élément y de A admet un antécédent dans B (il s'agit de $g(y)$), et tout élément y' dans $Y \backslash A$ appartient par définition à $f(X)$ donc admet un antécédent x par f dans X. Cet antécédent ne peut appartenir à B puisque $f(B) \subset A$, il appartient donc à C et constitue un antécédent de y' par h. Finalement, l'application h est bijective de X dans Y.

Exercice 11 (*)

Il faut vérifier les trois propriétés caractéristiques :

- $x + x$ est toujours un entier pair, donc la relation est réflexive.
- si $x + y$ est pair, $y + x$ aussi, donc la relation est symétrique.
- si $x + y$ et $y + z$ sont pairs, alors leur somme $x + 2y + z$ aussi, et $2y$ étant pair, $x + z$ le sera également, donc la relation est transitive.

La relation est bien une relation d'équivalence. Comme toutes les sommes de deux entiers pairs ou de deux entiers impairs sont paires, il n'y en fait que deux classes d'équivalence : l'une est consituée de tous les entiers pairs, l'autre de tous les entiers impairs.

Exercice 12 (**)

Là encore, on vérifie les trois propriétés :

- $x^2 - x^2 = x - x = 0$, donc la relation est réflexive.
- si $x^2 - y^2 = x - y$ alors $y^2 - x^2 = y - x$ (il suffit de changer les signes des deux côtés), donc la relation est symétrique.
- si $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$, alors en additionnant les deux équations, $x^2 - z^2 = x - z$, ce qui prouve la transitivité.

La relation est donc une relation d'équivalence. Une fois x fixé, l'équation $x^2 - y^2 = x - y$ peut s'écrire $(x - y)(x + y) = x - y$, ce qui se produit si $x - y = 0$ ou $x + y = 1$, c'est-à-dire si $y = x$ (normal) ou bien $y = 1 - x$. Il y a un cas particulier, celui du réel $x = \frac{1}{2}$ qui est tout seul dans sa classe d'équivalence. Toutes les autres classes d'équivalence sont constituées de deux éléments, par exemple la classe de 0 est $\{0, 1\}$, ou la classe de 5 est $\{5, -4\}$.

Exercice 13 (**)

1. Comme d'habitude, trois choses à vérifier :

   - la reflexivité est évidente : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^3 - x^3 = 3(x - x) = 0$.
   - la symétrie est encore plus évidente, si on inverse le rôle de x et de y, on change le signe des deux membres de l'égalité, ce qui donne une égalité équivalente.
   - la transitivité est à peine moins évidente : si $x^3 - y^3 = 3(x - y)$ et $y^3 - z^3 = 3(y - z)$, une simple addition des deux équations donne $x^3 - z^3 = 3(x - z)$.

   Tout va bien, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Fixons donc la valeur de x, on doit déterminer les valeurs de y telles que $x\mathcal{R}y$, c'est-à-dire les réels solutions de l'équation du troisième degré $y^3 - 3y + 3x - x^3 = 0$. Cette équation admet toujours pour solution $y = x$ (c'est normal, x doit appartenir à sa propre classe d'équivalence), on peut donc tout factoriser par $y - x$: $(y - x)(x^2 + xy + y^2) - 3(y - x) = 0$, soit $(y - x)(y^2 + xy + x^2 - 3) = 0$. Reste à déterminer les solutions éventuelles de l'équation du second degré $y^2 + xy + x^2 - 3 = 0$ (ici, la variable est bien y), de discriminant $\Delta = x^2 - 4(x^2 - 3) = 12 - 3x^2 = 3(4 - x^2)$. Distinguons quelques cas :

   - si $x > 2$ ou $x < -2$, le discriminant est strictement négatif, aucune solution réelle, et donc aucun autre élément que x dans la classe d'équivalence, qui est réduite à un seul élément.
   - si $x = 2$, l'équation $y^2 + 2y + 1 = 0$ admet pour seule solution $y = -1$, donc la classe d'équivalence $\{-1, 2\}$ contient deux éléments.
   - si $x = -2$, l'équation $y^2 - 2x + 1 = 0$ admet pour seule solution $y = 1$, donc la classe d'équivalence $\{-2, 1\}$ contient deux éléments.
   - si $x \in]-2, 2[$, l'équation du second degré admet deux racines $y_1 = \dfrac{-x + \sqrt{3(4 - x^2)}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{-x - \sqrt{3(4 - x^2)}}{2}$. On a donc a priori trois éléments dans notre classe d'équivalence, sauf évidemment si par malheur l'une des deux solutions qu'on vient d'écrire est égale à x. Ce sera le cas seulement si $3x = \pm\sqrt{3(4 - x^2)}$, ce qui implique $9x^2 = 3(4 - x^2)$, donc $x^2 = 1$. Ce qui tombe rudement bien, puisque les deux cas $x = 1$ et $x = -1$ ont déjà été vus (ce sont les classes d'équivalence à deux éléments contenant également 2 et -2). On aura donc trois éléments dans la classe de x si et seulement si $x \in]-2, 2[\backslash \{-1, 1\}$.

Exercice 14 (***)

1. La relation de parallélisme est réflexive (une droite est parallèle à elle-même), et transitive (si d et d' d'un coté, et d' et d'' de l'autre sont parallèles, alors d et d'' sont parallèles), mais pas antisymétrique. Au contraire, la relation est symétrique : si d est parallèle à d', alors d' est automatiquement parallèle à d. La relation de parallélisme est en fait une relation d'équivalence.

2. La relation d'inclusion est réflexive, transitive (si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$), et antisymétrique puisque $E \subset F$ et $F \subset E$ implique bien $E = F$. Il s'agit donc d'une relation d'ordre, qui n'est pas le moins du monde totale (par exemple, si $E = [0, 1]$ et $F = [2, 3]$, on n'a ni $E \subset F$ ni $F \subset E$). Le plus grand élément pour cette relation est $\mathbb{R}$, le plus petit est $\emptyset$.

3. La relation R est sûrement réflexive puisque $a^a \leqslant a^a$. Elle n'est par contre pas transitive : par exemple $7R2$ puisque $7^2 = 49 < 2^7 = 128$; $2R3$ puisque $2^3 = 8 < 3^2 = 9$, mais on n'a pas $3^7 < 7^3$ (en effet, $3^7 = 2\,187$ et $7^3 = 343$). Elle n'est pas non plus antisymétrique : $2R4$ et $4R2$ sont tous les deux vérifiés puisque $2^4 = 16 = 4^2$. Il y a un plus petit élément tout de même pour cette relation puisque $1Rb$ est vérifié quel que soit l'entier b. Il y a également un plus grand élément qui est 3 (cf plus bas). Si on enlève les cas particuliers 1 et 2, on peut en fait prouver que la relation R coïncide avec la relation $\geqslant$ (et qu'il s'agit donc d'une relation d'ordre

dont le plus grand élément est toujours 3 mais qui ne possède plus de plus petit élément). En effet, aRb est équivalent à $b\ln(a) \leqslant a\ln(b)$. Si on pose $f_a(x) = a\ln(x) - x\ln(a)$, la fonction a pour dérivée $\dfrac{a}{x} - \ln(a)$, qui s'annule en $x = \dfrac{a}{\ln(a)}$. La fonction est donc croissante puis décroissante. Or, elle s'annule certainement en $x = a$, avec $a > \dfrac{a}{\ln(a)}$ puisque a est supposé supérieur à 3. On a donc $f_a(x) < 0$ si $x > a$, et en particulier bRa si $b > a$. Sur l'intervalle $[3, a]$, la fonction f_a est croissante puis décroissante, reste à vérifier le signe de $f_a(3)$. Or, $f_a(3) = a\ln(3) - 3\ln(a) = -f_3(a)$, donc on vient d'expliquer que c'était nécessairement positif si $a \geqslant 3$. La fonction f_a est donc positive sur $[3, a]$, et cela prouve que aRb si $b \leqslant a$. Notre relation est donc bien une relation d'ordre total (assez élémentaire qui plus est !).

4. La relation R est certainement réflexive, transitive (si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ pour tout réel alors $f(x) \leqslant h(x)$), mais également antisymétrique (en effet si $f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant f(x)$, alors $f(x) = g(x)$ et cette relation est vraie pour tous les réels). C'est donc une relation d'ordre. Ce n'est pas du tout une relation d'ordre total, si on prend par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, on ne peut pas les comparer à l'aide de la relation R (si $x < 0$, $f(x) < g(x)$, mais si $x > 0$, $g(x) < f(x)$). Il n'y a pas non plus de plus grand élément (une fonction ne peut pas être supérieure à toutes les fonctions constantes, encore moins à toutes les fonctions tout court) ni de plus petit élément.
5. La relation R est réflexive (puisque $|0| \leqslant 0$), mais aussi transitive (si $|x' - x| \leqslant y' - y$ et $|x'' - x'| \leqslant y'' - y'$, alors par inégalité triangulaire $|x'' - x| \leqslant |x'' - x'| + |x' - x| \leqslant y'' - y' + y' - y \leqslant y'' - y$) et antisymétrique : si $|x' - x| \leqslant y' - y$ et $|x - x'| \leqslant y - y'$, alors on a nécessairement $y - y' = 0$ (sinon l'un des deux membres de droite des inégalités précédentes est strictement négatif, et une valeur absolue ne peut pas lui être inférieure !), puis $|x - x'| = 0$, soit $x = x'$. Les deux couples coïncident donc. La relation d'ordre n'est pas totale, par exemple $(0, 0)$ et $(1, 0)$ ne sont pas comparables puisqu'on a alors $y - y' = y' - y = 0$, mais $|x - x'| = 1$. Il n'y a pas de plus grand ni de plus petit élément pour R (pour un couple fixé, on peut par exemple toujours trouver un autre couple tel que $y - y' < 0$ qui ne peut donc pas être plus grand). Un plus grand élément pour le disque trigonométrique serait nécessairement le point du disque ayant la plus grande ordonnée (pour que le membre de droite dans la relation R ne soit jamais strictement négatif, sinon on ne peut plus comparer avec un autre élément du disque), à savoir le point $(0, 1)$. Mais ce point n'est pas plus grand que tous les autres du disque trigo, par exemple $(0.6, 0.6)$ est un point du disque trigonométrique, mais $|0.6 - 0| > 1 - 0.6$. On peut par contre trouver une borne supérieure, en l'occurence le couple $(0, \sqrt{2})$.

Exercice 15 (**)

1. On vérifie les trois propriétés fondamentales :
   - $(n, p)\mathcal{R}(n, p)$ est évident donc la relation est réflexive.
   - si $(n, p)\mathcal{R}(n', p')$ et $(n', p')\mathcal{R}(n, p)$, alors $n \leqslant n' \leqslant n$ et $p \leqslant p' \leqslant p$, donc $n = n'$ et $p = p'$, ce qui prouve l'antisymétrie.
   - la transitivité est totalement évidente également : si $n \leqslant n'$, $p \leqslant p'$ et $n' \leqslant n''$, $p \leqslant p''$, alors $n \leqslant n''$ et $p \leqslant p''$.

   L'ordre n'est du tout total, il est par exemple impossible de comparer les couples $(1, 2)$ et $(2, 1)$.
2. Oui, $(0, 0)$ est un minimum évident dans $\mathbb{N}^2$. Il n'y a par contre pas de plus grand élément, qui devrait être plus grand que tout couple de la forme (n, n), avec $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique que chacun des deux éléments du couple soit « infini ».
3. Ici, oui, $(1, 1)$ est un élément minimal (et a fortiori une borne inférieure). Par contre, pas d'élément maximal, il n'y a aucun élément dans l'ensemble qui soit à la fois « supérieur » à

$(5,2)$ (ce qui implique une valeur de n au moins égale à 5) et à $(4,5)$ (valeur de p au moins égale à 5. Il est par contre facile de prouver que $(5,5)$ est la borne supérieure de A : tout majorant de A doit vérifier $n \geqslant 5$ et $p \geqslant 5$ d'après les remarques précédentes, et sera donc « supérieur » à $(5,5)$, qui est par ailleurs un majorant évident de A.

4. Pas de plus petit élément pour B : il contient les deux couples $(11,0)$ et $(0,11)$, un plus petit élément devrait être « inférieur » à ces deux couples, et seul le couple $(0,0)$ l'est (et il n'appartient évidemment pas à B). D'ailleurs, $(0,0)$ est donc le seul minorant de B, et donc la borne inférieure de l'ensemble. C'est le même principe de l'autre côté, pas de maximum car B contient $(19,0)$ et $(0,19)$, ce qui implique qu'un majorant (n,p) vérifie $n \geqslant 19$ et $p \geqslant 19$ et ne peut donc appartenir à B (on aura $n+p \geqslant 38$). Là encore, facile de se convaincre que $(19,19)$ est la borne supérieure de B, il ne peut pas y avoir de plus petit majorant de l'ensemble B.
5. Supposons donc qu'un sous-ensemble $C \subset \mathbb{N}^2$ soit majoré par le couple (a,b), alors tous les couples (n,p) appartenant à C vérifient $n \leqslant a$ et $p \leqslant b$. En particulier, l'ensemble des valeurs prises par n lorsque (n,p) parcourt C est majoré, donc fini (on est dans $\mathbb{N}$), et admet donc un plus grand élément n_0. De même, l'ensemble des valeurs prises par p admet un maximum p_0. Le couple (n_0,p_0) est alors un majorant de C et c'est nécessairement le plus petit, il s'agit donc de sa borne supérieure. L'énoncé proposé est donc vrai.

Exercice 16 (**)

Tout nombre de la forme $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ est également de la forme $x+\dfrac{1}{x}$, avec $x>0$ (en posant bien entendu $x=\dfrac{a}{b}$). Posons donc $f : x \mapsto x+\dfrac{1}{x}$ et étudions cette fonction sur l'intervalle $]0,+\infty[$. La fonction f est continue et dérivable, et $\forall x>0$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$. Cette dérivée est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$. La fonction f admet donc un minimum en 1, de valeur $f(1)=2$. Inutile de calculer les limites de la fonction, on a déjà largement assez d'informations : tous les nombres de l'ensemble dont on cherche à calculer la borne inférieure sont supérieurs ou égaux à 2. Or, l'ensemble contient la valeur 2 (il suffit de poser $a=b=1$ par exemple), qui est donc non seulement la borne inférieure, mais même le minimum de notre ensemble.

Exercice 17 (**)

L'ensemble A étant borné, il existe un couple de réels (m,M) tels que, $\forall x \in A$, $m \leqslant x \leqslant M$. On en déduit que, $\forall (x,y) \in A^2$, on aura $m \leqslant y \leqslant M$, et $-M \leqslant -x \leqslant -m$, donc $m-M \leqslant y-x \leqslant M-m$. On en déduit que $|y-x| \leqslant |M-m|$, autrement dit que l'ensemble dont $\delta(A)$ est censé être la borne supérieure est un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}^+$. Cet ensemble est par ailleurs non vide : A étant supposé non vide, il contient un élément x, et $|x_x|=0$ appartient donc à notre ensemble, qui admet une borne supérieure comme sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$.

On a déjà signalé plus haut que $|y-x| \leqslant |M-m|$ pour tout couple $(x,y) \in A^2$, et tout majorant M, tout minorant m de l'ensemble A. En particulier, on a donc toujours $|y-x| \leqslant |\sup(A)-\inf(A)| = \sup(A)-\inf(A)$ (la borne supérieure est toujours plus grande que la borne inférieure, la valeur absolue est donc superflue). Le réel $\sup(A)-\inf(A)$ est un majorant de notre ensemble de distances, donc il est plus grand que sa borne supérieure (qui est par définition le plus petit majorant), ce qui prouve que $\delta(A) \leqslant \sup(A)-\inf(A)$. Reste à prouver l'inégalité dans l'autre sens, ce qui nécessite un peu de technique. Posons $\varepsilon>0$, par caractérisation de la borne supérieur, il existe un élément $y \in E$ tel que $\sup(A)-\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant x \leqslant \sup(A)$ (la division par 2 est tout à fait volontaire, de toute façon $\dfrac{\varepsilon}{2}$ est un réel strictement positif comme un autre). De même, il existe un élément $x \in E$ tel que $\inf(A) \leqslant x \leqslant \inf(A)+\dfrac{\varepsilon}{2}$. En combinant les deux encadrements, on trouve $y-x \geqslant \sup(A)-\inf(A)-\varepsilon$, ce qui implique que $\delta(A) \geqslant \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon$ (en tant que majorant, $\delta(A)$ doit être plus grand que tout nombre de la forme $y - x$, avec $(x, y) \in A^2$). Comme cette inégalité doit être vraie pour tout réel strictement positif ε, elle implique en fait que $\delta(A) \geqslant \sup(A) - \inf(A)$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 18 (*)

1. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$, et $x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$, donc $\mathcal{S} = \{2, 3\}$.
2. On constate que 1 est racine de ce polynome puisque $2-4+3-1 = 0$. On peut donc factoriser par $x-1$: $(2x^3 - 4x^2 + 3x - 1) = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Par identification, on obtient $a = 2$, $b = -2$ et $c = 1$, donc $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = (x-1)(2x^2 - 2x + 1)$. Cherchons les racines de ce dernier trinome, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$. Il n'y a donc pas de racines réelles, et concernant l'équation initiale, $\mathcal{S} = \{1\}$.
3. Posons $X = \sqrt{x}$ (en notant au passage que l'équation ne peut avoir de sens que si $x \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$). L'équation devient alors $X^2 = X + 2$, soit $X^2 - X - 2 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9$, et admet donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $X_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Cette dernière solution est à exclure. Comme on a, par définition de X, $x = X^2$, on obtient donc $\mathcal{S} = \{4\}$.
4. $x^3 + 5x^2 \leqslant 6x \Leftrightarrow x(x^2 + 5x - 6) \leqslant 0$. Dans le but de faire un tableau de signe, cherchons les racines de la parenthèse, qui a pour discriminant $\Delta = 25 + 4 \times 6 = 49$, donc admet deux racines réelles $x_1 + \dfrac{-5-7}{2} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{2} = 1$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x		-6		0		1	
x	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
x^2+5x-6	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
x^3+5x^2-6	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On en conclut que $\mathcal{S} =]-\infty, -6] \cup [0, 1[$

5. $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3-(x^2-4)}{x^2-4} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-1}{x^2-4} > 0$. Le dénominateur a pour racines -2 et 2. Quant au numérateur, il a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. D'où le tableau de signes suivant :

x		-2		$1-\sqrt{2}$		2		$1+\sqrt{2}$	
x^2-2x-1	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$\frac{x^2-2x-1}{x^2-4}$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup]1-\sqrt{2}, 2[\cup]1+\sqrt{2}, +\infty[$.

6. Commençons par constater que l'équation n'est pas une équation du second degré si $m = 1$. Elle se résume alors à $2x+2 = 0$, qui a pour unique solution $x = -1$. Dans le cas général $m \neq 1$, on peut calculer le discriminant de l'équation : $\Delta = 4(m-2)^2 - 4(m-1)(m+1) = 4(m^2 - 4m + 4 - m^2 + 1) = 4(5 - 4m)$. Si $5 - 4m > 0$, soit $m < \dfrac{5}{4}$ (en excluant bien sûr le cas $m = 1$), notre équation admet deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{2(m-2) - 2\sqrt{5-4m}}{2(m-1)} = \dfrac{m-2-\sqrt{5-4m}}{m-1}$, et

$x_2 = \dfrac{m-2+\sqrt{5-4m}}{m-1}$. Dans le cas où $m > \dfrac{5}{4}$, le discriminant est strictement négatif, et on a cette fois-ci deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{m-2-i\sqrt{4m-5}}{m-1}$ et $z_2 = \dfrac{m-2+i\sqrt{4m-5}}{m-1}$. Enfin, dans le cas où $m = \dfrac{5}{4}$, l'équation admet une solution unique $x_0 = \dfrac{2(m-2)}{2(m-1)} = \dfrac{\frac{5}{4}-2}{\frac{5}{4}-1} = -3$.

Exercice 19 (**)

Pour chaque inégalité, le plus simple est de calculer la différence des deux membres et de déterminer son signe. Par exemple, $y-m = y-\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{y-x}{2} \geqslant 0$ puisqu'on a supposé $x \leqslant y$, ce qui prouve que $m \leqslant y$. De même, $h-x = \dfrac{2xy}{x+y} - x = \dfrac{2xy-x^2-xy}{x+y} = \dfrac{x(y-x)}{x+y} \geqslant 0$, ce qui prouve que $x \leqslant h$. Calculons maintenant $m-g = \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{x-2\sqrt{xy}+y}{2} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geqslant 0$, donc $g \leqslant m$. Enfin, il nous reste à étudier $g-h = \sqrt{xy} - \dfrac{2xy}{x+y} = \dfrac{\sqrt{xy}(x+y-2\sqrt{xy})}{x+y} = \dfrac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y} \geqslant 0$, et notre dernière inégalité est bien prouvée.

Exercice 20 (**)

- Comme $2 \leqslant 2x \leqslant 8$ et $-15 \leqslant -3y \leqslant -6$, on obtient $-12 \leqslant 2x-3y+1 \leqslant 3$.
- Comme $1 \leqslant x \leqslant 4$ et $-1 \leqslant y-3 \leqslant 2$, on obtient $-4 \leqslant x(y-3) \leqslant 8$ (séparez les cas suivant le signe de y si vous n'êtes pas sûrs de vous pour ce genre de cas). On aurait aussi pu dire que $x(y-3) = xy-3x$, or $2 \leqslant xy \leqslant 20$ et $-12 \leqslant -3x \leqslant -4$, mais on obtient alors $-10 \leqslant x(y-3) \leqslant 16$, ce qui est un encadrement nettement moins précis que le précédent.
- Comme $-3 < z < 3$; $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{z}{2} < \dfrac{3}{2}$.
- Comme $3 \leqslant 3x \leqslant 12$ et $\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{y+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$, on obtient $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{3x}{y+1} \leqslant 4$.
- Comme $-5 < z-2 < 1$, on obtient $\dfrac{1}{z-2} < -\dfrac{1}{5}$ ou $\dfrac{1}{z-2} > 1$ (on est obligés de distinguer deux cas suivant le signe de z).
- On peut bien sûr encadrer x^2-4x+4 terme par terme (ce qui donne finalement $-11 \leqslant x^2-4x+4 \leqslant 16$), mais il est beaucoup plus efficace de constater que $x^2-4x+4 = (x-2)^2$. Comme $-1 \leqslant x-2 \leqslant 2$, on a alors $0 \leqslant x^2-4x+4 \leqslant 4$.
- Comme $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{y-1} \leqslant 1$ et $-7 < z-4 < -1 \Rightarrow -28 < x(z-1) < -1$, on obtient $-28 < \dfrac{x(z-4)}{y-1} < -\dfrac{1}{4}$.
- On a $2 \leqslant xy \leqslant 20$, donc $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant 2\sqrt{5}$, et $-1 < 2-z < 5$, donc $-3e^5 < -3e^{2-z} < -\dfrac{3}{e}$, d'où finalement $\sqrt{2}-3e^5 < \sqrt{xy}-3e^{2-z} < 2\sqrt{5}-\dfrac{3}{e}$.

Exercice 21 (**)

1. Tous les membres de l'encadrement sont positifs, on peut donc élever au carré pour les comparer de façon équivalente. Ainsi, $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y} \Leftrightarrow x+y \leqslant x+2\sqrt{xy}+y$, ce qui est vrai de façon évidente. Même méthode pour l'inégalité de droite : $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x+y} \Leftrightarrow$

$x + 2\sqrt{xy} + y \leqslant 2(x+y) \Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geqslant 0$. Or, cette dernière inégalité est vrai car on reconnait une identité remarquable : $x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \geqslant 0$.

2. Supposons donc $x \geqslant y$, et posons $X = x - y$, alors en appliquant l'inégalité de gauche de l'encadrement précédent à X et à y (qui sont bien des réels positifs), $\sqrt{X+y} \leqslant \sqrt{X} + \sqrt{y}$, soit $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x-y} + \sqrt{y}$. Il suffit de passer le $\sqrt{y}$ à gauche pour obtenir la majoration souhaitée.
3. On reprend l'inégalité de droite de la première question : $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x+y}$. De même, on aura $\sqrt{x} + \sqrt{z} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x+z}$ et $\sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{y+z}$. On ajoute ces trois inégalités : $2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \leqslant \sqrt{2}(\sqrt{x+y} + \sqrt{x+z} + \sqrt{y+z})$. Il ne reste plus qu'à simplifier par 2 et à développer à droite pour obtenir la majoration de l'énoncé.
4. C'est une conséquence directe de la question précédente en posant $x = a + b - c$, $y = b + c - a$ et $z = c + a - b$. En effet, on aura alors $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{a+b-c+b+c-a}{2} = b$, et de même $\dfrac{x+z}{2} = a$ et $\dfrac{y+z}{2} = c$. Il faut tout de même aussi préciser que les trois nombres $a + b - c$, $b + c - a$ et $c + a - b$ sont tous positifs, mais c'est évident (la somme des longueurs de deux côtés d'un triangle est toujours supérieure ou égale à celle du troisième côté).

Exercice 22 (* à **)

1. $|x - 3| \geqslant 5$ signifie que $x - 3 \geqslant 5$ ou $x - 3 \leqslant -5$, d'où $\mathcal{S} =]-\infty, -2] \cup [8, +\infty[$.
2. $|2x - 4| = |3x + 2| \leftrightarrow 2x - 4 = 3x + 2$ ou $2x - 4 = -3x - 2$ soit $-x = 6$ ou $5x = 2$, et $\mathcal{S} = \left\{-6, \dfrac{2}{5}\right\}$
3. $|x^2 - 8x + 11| = 4$ revient à dire que $x^2 - 8x + 11 = 4$ ou $x^2 - 8x + 11 = -4$. Il ne reste plus qu'à résoudre ces deux équations du second degré. La première a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 7 = 36$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{8-6}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{8+6}{2} = 7$. La deuxième a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 15 = 4$, et admet deux racines réelles $x_3 = \dfrac{8-2}{2} = 3$ et $x_4 = \dfrac{8+2}{2} = 5$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1, 3, 5, 7\}$.
4. Pas besoin de se fatiguer pour celle-là, le membre de gauche étant manifestement positif (c'et une somme de deux valeurs absolues), il ne sera jamais strictement inférieur à -2, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
5. Il n'y a pas de méthode fiable pour s'en sortir par le calcul, le mieux est donc d'écrire l'inéquation sous la forme $|x-2| - |4x+2| \geqslant 0$, et de faire un « tableau de signes »pour simplifier le membre de gauche :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$	0	$x-2$
$\|4x+2\|$	$-4x-2$	0	$4x+2$	$4x+2$
$\|x-2\| - \|4x+2\|$	$3x+4$	$-5x$		$-3x-4$

Comme $3x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{4}{3}$, les réels de l'intervalle $\left[-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{2}\right]$ sont solutions de l'équation initiale (on ne garde bien sûr que les valeurs de x appartenant à l'intervalle sur lequel l'expression $3x + 4$ est valide). De même, on a $-5x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$, donc l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$ est aussi solution. Enfin, $-3x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{4}{3}$, ce qui n'ajoute pas de solutions. En regroupant le tout, on obtient donc $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{4}{3}, 0\right]$.

6. Ici, difficile d'être tenté de faire quoi que ce soit d'autre qu'un tableau :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		3		7	$+\infty$
$\lvert 2x-3\rvert$	$-2x+3$	0	$2x-3$		$2x-3$		$2x-3$
$\lvert 3-x\rvert$	$3-x$		$3-x$	0	$-3+x$		$-3+x$
$\lvert x-7\rvert$	$-x+7$		$-x+7$		$-x+7$	0	$x-7$
$\lvert 2x-3\rvert+\lvert 3-x\rvert-\lvert x-7\rvert$	$-2x-1$		$2x-7$		$4x-13$		$2x+1$

Ne reste plus qu'à résoudre pas moins de quatre équations, et à vérifier si les solutions obtenues appartiennent au bon intervalle à chaque fois : $-2x-1=2 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$, solution acceptable ; $2x-7=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{2}$, solution rejetée ; $4x-13=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{15}{4}$, solution acceptable ; $2x+1=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$, solution rejetée. Bilan : $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{15}{4}\right\}$.

7. $|e^x-3|<1 \Leftrightarrow -1<e^x-3<1 \Leftrightarrow 2<e^x<4 \Leftrightarrow \ln 2<x<\ln 4$, donc $\mathcal{S}=]\ln 2, \ln 4[$.
8. On peut commencer par constater que le second membre doit être positif pour que l'équation puisse avoir une solution, et donc résoudre uniquement sur $[5,+\infty[$. On a alors, en élevant au carré (tout est positif) $|x^2-1|=(x-5)^2$, soit $x^2-1=x^2-10x+25$ (la valeur absolue à gauche est superflue, ce qui est à l'intérieur est positif sur notre intervalle d'étude). Reste la très simple équation $10x=26$, dont la solution n'appartient pas à notre intervalle d'étude, d'où $\mathcal{S}=\emptyset$.

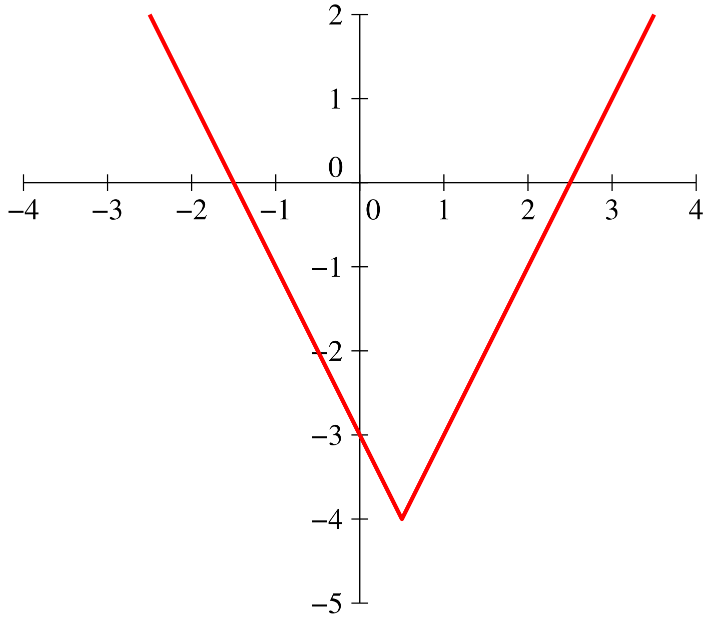
Exercice 23 (**)

Pour contourner le problème, élevons au carré l'égalité qui nous est donnée dans l'énoncé : $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2=\dfrac{a}{b}+2+\dfrac{b}{a}=(\sqrt{5})^2=5$, donc $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=3$. Élevons maintenant au carré l'expression qu'on nous demande de calculer (avec ou sans valeur absolue, ça ne change rien) : $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2=\dfrac{a}{b}-2+\dfrac{b}{a}=1$ en exploitant le calcul précédent. Notre nombre a donc un carré égal à 1, et il est positif (c'est une valeur absolue), il vaut forcément 1.

Exercice 24 (* à ***)

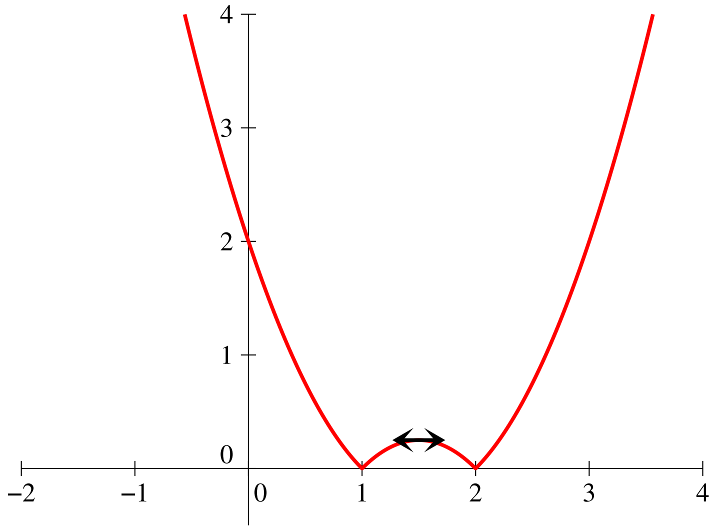
1. La fonction $x \mapsto 2x-1$ est toujours croissante, et s'annule en $\dfrac{1}{2}$. De là, il est aisé d'obtenir le tableau de variations de f, ainsi que sa courbe :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$\searrow$	-4	$\nearrow$



2. On commence par étudier variations et signe de ce qui se trouve à l'intérieur de la valeur absolue. Le trinome a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$. De plus, $x^2 - 3x + 2$ a pour dérivée $2x - 3$, et admet donc un minimum en $x = \dfrac{3}{2}$, de valeur $\dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} + 2 = -\dfrac{1}{4}$. On en déduit le tableau et la courbe :

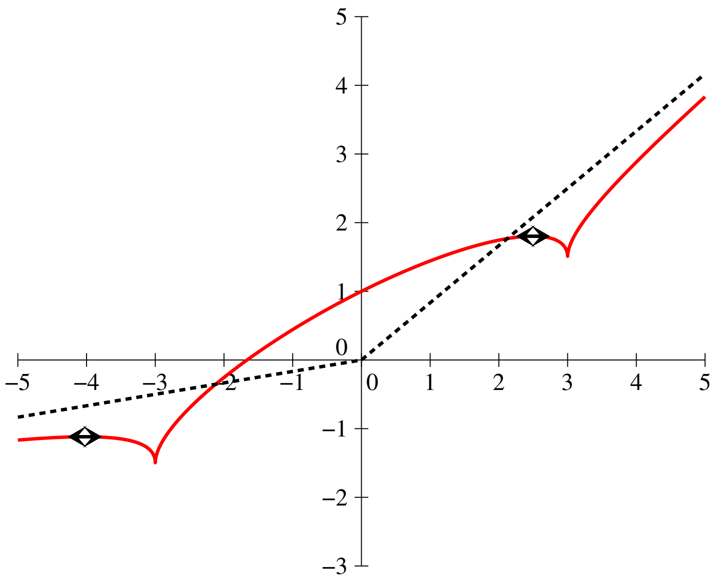
x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	



3. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, mais il vaut mieux essayer de l'exprimer de différentes façons selon la valeur de x. Si $x \geqslant 3$, on a $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}\sqrt{x^2 - 9}$, et la fonction est croissante sur $[3, +\infty[$ en tant que somme de deux fonction croissantes. Sur les deux autres intervalles à étudier, les calculs vont être un tout petit peu plus pénibles... Començons par exemple

par $[-3,3]$, intervalle sur lequel $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}$. On a sur cet intervalle $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{3\sqrt{9-x^2}-2x}{6\sqrt{9-x^2}}$. Cette dérivée est positive sur $[-3,0]$, mais s'annule lorsque $x > 0$ et $3\sqrt{9-x^2} = 2x$, soit (en passant tout au carré) $9(9-x^2) = 4x^2$, ou encore $81 = 13x^2$. La fonction f est donc croissante sur $\left[-3, \sqrt{\frac{81}{13}}\right]$, et décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{81}{13}}, 3\right]$ (pour information, la valeur un peu bizarre vaut environ $2,5$). Ne reste plus qu'à s'occuper de l'intervalle $]-\infty,-3]$, où la fonction est égale à $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{x^2-9}$. Un calcul extrêmement similaire au précédent montre que la dérivée s'annule lorsque $3\sqrt{x^2-9} = -2x$, soit $9(x^2-9) = 4x^2$. On obtient donc un autre minimum local pour $x = -\sqrt{\frac{81}{5}}$ (un peu avant -4). On peut même, avec un peu de motivation, calculer les valeurs de nos maxima locaux : $f\left(-\frac{9}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{9}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{81}{5}} = -\frac{9}{2\sqrt{5}} + \frac{6}{3\sqrt{5}} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq -1,12$. De même, on obtient $f\left(\frac{9}{\sqrt{13}}\right) = \frac{\sqrt{13}}{2} \simeq 1,8$ Voici donc le magnifique tableau de variations et la non moins superbe courbe représentative de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{9}{\sqrt{5}}$		-3		$\frac{9}{\sqrt{13}}$		3		$+\infty$
f		$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	



Complément pour les plus motivés : étude des asymptotes à la courbe représentative de f. On constate sans difficulté que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. C'est moins évident de l'autre côté : on peut écrire $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}$ (si $x < -3$). Attention, comme $x < 0$, on a $\sqrt{x^2} = -x$, donc $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}} = x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right)$. La parenthèse auant pour limite $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ en $-\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. En reprenant le calcul qu'on vient d'effectuer, on obtient sans problème $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{6}$. Reste maintenant à calculer $f(x)-\frac{1}{6}x=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=\frac{x}{3}\left(1-\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right)$. On a une belle forme indéterminée, mais un petit coup de quantité conjuguée permet de s'en sortir : $f(x)-\frac{1}{6}x=\frac{x}{3}\times\frac{1-1+\frac{9}{x^2}}{1+\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\frac{3}{x(1+\sqrt{1-\frac{9}{x^2}})}$, qui a une limite nulle en $-\infty$. On en déduit que la droite d'équation $y=\frac{1}{6}x$ est asymptote oblique à notre courbe en $-\infty$. En $+\infty$, le calcul est quasiment le même, sauf que c'est un x et non un $-x$ qui sort de la racine carrée quand on factorise, ce qui donne une limite pour $\frac{f(x)}{x}$ égale à $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$. On obtient ensuite de même que la droite d'équation $y=\frac{5}{6}x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.

Encore un calcul possible, celui du signe de f. La fonction est clairement positive si $x\geqslant 0$, et elle s'annule sur $\mathbb{R}^-$ si $\frac{1}{3}\sqrt{|x^2-9|}=-\frac{1}{2}x$. En élevant au carré (tout est positif avec notre hypothèse), on trouve $\frac{1}{9}|x^2-9|=\frac{1}{4}x^2$. Ce qui nous laisse deux possibilités : soit $\frac{x^2-9}{9}=\frac{1}{4}x^2$, ce qui donne $x^2\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)=1$, ce qui est impossible (on obtient une valeur négative pour x^2), soit $\frac{9-x^2}{9}=\frac{1}{4}x^2$, soit $x^2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\right)=1$, donc $\frac{13}{36}x^2=1$, et $x=-\frac{6}{\sqrt{13}}$ (on ne garde que la valeur négative), soit $x\simeq-1.66$.

Exercice 25 (**)

1. Il faut bien entendu que x ne soit pas égal à 1, mais aussi que l'expression sous le ln soit strictement positive. Elle est toujours positive en tant que valeur absolue, mais s'annule quand $x=-1$, qui est donc aussi une valeur interdite pour la fonction f. Bref, $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.
2.
   - $f(-2)=\frac{1}{-3}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-1}{3}\right|=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln(3)=-\frac{1}{3}-\ln(\sqrt{3})$.
   - $f\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{-\frac{2}{5}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}\right|=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\ln(4)=\ln(2)-\frac{5}{2}$.
   - $f(\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right|=\frac{1+\sqrt{2}}{2-1}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})^2=1+\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.
3. Les limites les plus faciles à calculer sont celles en -1. On a alors $\lim_{x\to-1}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}$, et $\lim_{x\to-1}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=0$, donc $\lim_{x\to-1}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=0=-\infty$, et $\lim_{x\to-1}f(x)=-\infty$ (à droite comme à gauche, aucune raison de distinguer deux cas ici).
   Regardons ensuite ce qui se passe à l'infini : en gardant les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, on a $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+x}{1-x}=-1$, donc $\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=0$, puis $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$.
   Enfin, $\lim_{x\to 1}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=+\infty$ (à gauche comme à droite avec la valeur absolue), donc $\lim_{x\to 1}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=$

$+\infty$. Aucun problème du côté droit, on a $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Mais à gauche de 1, on a une belle forme indéterminée du type « $-\infty + \infty$ ». Comme on manque un peu de technique pour effectuer le calcul vraiment rigoureusement, on se contentera d'invoquer sans plus de précisions la croissance comparée (de fait c'en est bien une, mais loin d'être élémentaire) pour cacher sous le tapis le morceau contenant un ln et prétendre que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.
La courbe admettra donc trois asymptotes : les droites verticales d'équation $x = -1$ et $x = 1$, et l'axe des abscisses qui est asymptote horizontale en $-\infty$ comme en $+\infty$.

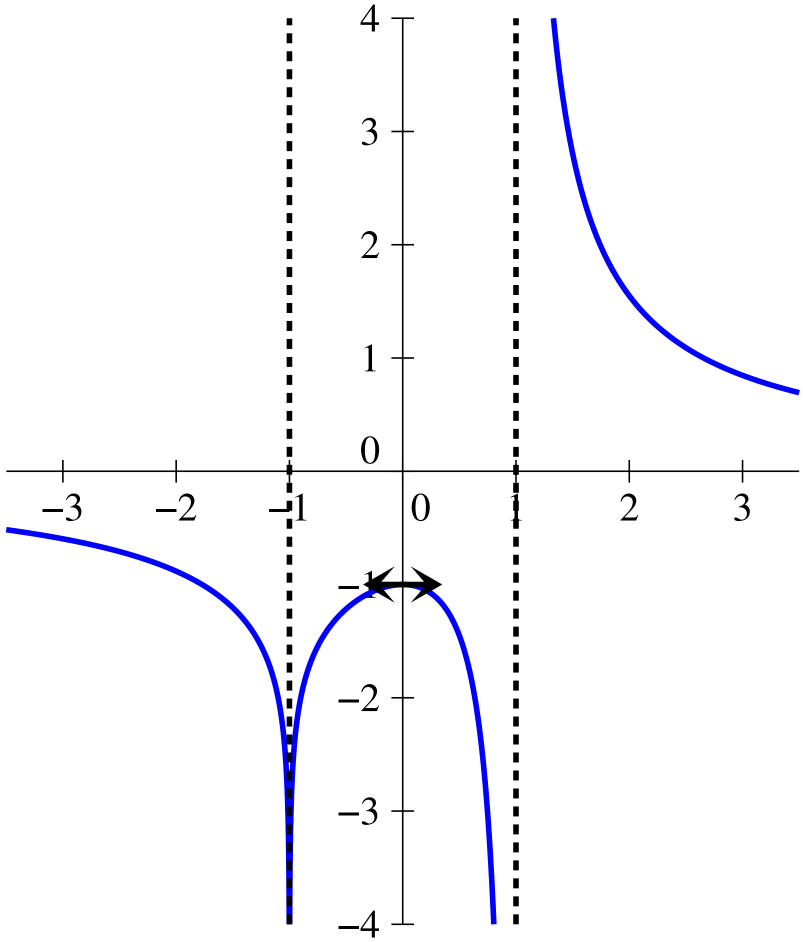
4. Il suffit d'étudier le signe de ce qui se trouve dans la valeur absolue. Ce quotient est du même signe que le produit $(1+x)(1-x)$, donc positif entre ses racines 1 et -1. Autrement dit, sur $]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, et sur les deux autres intervalles de définition de f, $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$, on aura $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)$.

5. C'est en fait une propriété générale : la dérivée de $\ln|u|$ vaut toujours $\dfrac{u'}{u}$, quel que soit le signe de la fonction u. En effet, sur les intervalles où u est positive, on peut enlever la valeur absolue et utiliser la formule de dérivation habituelle. Mais sur ceux où u est négative, on dérive alors $\ln(-u)$, ce qui donne $\dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u}$ après annulation des deux signes moins.
Ici, on peut donc calculer la dérivée sur $]-1,1[$, la formule restera valable sur les autres intervalles de définition de f. Commençons par poser $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ et calculons $u'(x) = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$. Il est maintenant temps de dériver f : $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(1-x)^2} \times \dfrac{1-x}{1+x} = -\dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1+x)(1-x)} = \dfrac{-1-x+1-x}{(1-x)^2(1+x)} = -\dfrac{2x}{(1-x)^2(1+x)}$.

6. La dérivée calculée est du signe de $-\dfrac{2x}{1+x}$, c'est-à-dire du signe de $-x(1+x)$, qui s'annule en 0 (et en -1, mais c'est une valeur interdite pour f), et sera positive uniquement sur l'intervalle $]-1,0]$. La seule valeur à calculer pour compléter notre tableau de variations est $f(0) = -1 + \ln(1) = -1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	0

7. Voici une belle allure de courbe :



8. Sans chercher à justifier très rigoureusement (il faudrait parler de bijection pour cela), une étude précise du tableau de variations ou de la courbe donne les cas suivants :
   - si $a < -1$, l'équation $f(x) = a$ admet trois solutions : une sur $]-\infty, -1[$, une sur $]-1, 0[$ et une sur $]0, 1[$.
   - si $a = -1$, l'équation n'a plus que deux solutions : une sur $]-\infty, -1[$ et $x = 0$.
   - si $-1 < a < 0$, il ne reste qu'une seule solution appartenant à $]-\infty, -1[$.
   - si $a = 0$, on trouve le seul cas où l'équation n'a aucune solution.
   - si $a > 0$, on a à nouveau une solution unique, appartenant cette fois-ci à l'intervalle $]0, +\infty[$.