Feuille d'exercices n° 18 : Applications linéaires

MPSI Lycée Camille Jullian

23 mars 2023

Exercice 1 (*)

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, déterminer pour chacune des applications $\varphi : E \to E$ définies par $\varphi(f) = g$ si elles sont linéaires ou non :

- $g(x) = \int_0^x f(t)\ dt$
- $g(x) = \int_0^{x^2} f(t)\ dt$
- $g(x) = \int_0^x f(t^2)\ dt$
- $g(x) = \int_0^x f^2(t)\ dt$
- $g(x) = \int_0^x t^2 f(t)\ dt$
- $g(x) = x^2 \int_0^x f(t)\ dt$
- $g(x) = f''(x)$
- $g(x) = f''(x^2)$
- $g(x) = f''(x)^2$
- $g(x) = f''(0)x^2$
- $g(x) = f''(x) + x\int_0^x f'(t)\ dt$
- $g(x) = \int_0^x f(t)\ dt f'(t)$

Exercice 2 (*)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que les images des vecteurs de la base canonique soient $(1,-1,2)$, $(-3,2,-1)$ et $(-7,4,1)$.

1. Déterminer une expression explicite de u.
2. Déterminer les antécédents par u de $(-1,1,8)$ et de $(-2,1,3)$.
3. u est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 3 (**)

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $u^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$, et que $id_E + u$ est un automorphisme.
2. Dans le cas général, montrer que $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(u^2) = \ker(u)$; et que $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 4 (**)

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et on définit l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $f(z) = z + a\overline{z}$, où a est un nombre complexe fixé. Montrer que f est linéaire, Déterminer son noyau, et donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit bijective.

Exercice 5 (**)

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on note $F = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $G = \{(x,y,z) \mid 2x + y - z = 0\}$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et déterminer l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G et de la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

Exercice 6 (***)

Soient f et g deux endomorphismes d'un même espace vectoriel E.

1. Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2)$ si et seulement si $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ si et seulement si $\ker(f) + \mathrm{Im}(f) = E$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ supplémentaires dans E.
4. Montrer que $f \circ g$ est un automorphisme si et seulement si f est surjective, g injective et $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g) = E$.

Exercice 7 (*)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right)$. Montrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques (noyau et image).

Exercice 8 (**)

On note E l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, et F le sev de E constitué des fonctions (continues) s'annulant en 0. Montrer que la droite vectorielle engendrée par la fonction exponentielle est supplémentaire de F dans E, et déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à cette droite.

Exercice 9 (***)

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $\varphi : E \to E$ l'application définie par $\varphi(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\ dt$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que, si $f \in \ker(\varphi)$, alors $\int_0^1 f(t)\ dt = 0$, et f est périodique de période 1.
3. La réciproque de la propriété montrée à la question précédente est-elle vraie ?
4. L'endomorphisme φ est-il injectif ? Surjectif ?
5. On restreint l'application φ au sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_2[X]$ de E. Montrer que cette restriction est un endomorphisme de F.
6. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$.
7. Montrer que $\varphi_{|F}$ est un automorphisme.

Exercice 10 (***)

Soient p et q deux projecteurs dans un même espace vectoriel E, vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.
3. Montrer que $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$.
4. On suppose de plus que $p \circ q = 0$ (et donc $q \circ p = 0$ également). Montrer alors que $p + q$ est aussi un projecteur, de mêmes noyau et image que $p \circ q$.

Exercice 11 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. On pose, pour tout entier naturel n, $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite (N_k) est croissante et la suite (I_k) décroissante (au sens de l'inclusion des ensembles).
2. Montrer qu'il existe un entier p pour lequel $N_p = N_{p+1}$, puis que la suite (N_k) stationne à partir du rang p.
3. Montrer que la suite (I_k) stationne à partir du même rang p.
4. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.

Exercice 12 (***)

On se place dans $\mathbb{C}_3[X]$, et on note $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. On désigne par f l'application qui, à un polynôme P, associe le reste de la division de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$? Montrer que $\mathrm{Im}(f) = (X-1)\mathbb{C}_2[X]$.
4. Déterminer les quatre racines z_1, z_2, z_3 et z_4 de B.
5. Montrer qu'en posant $P_k = \dfrac{B}{X - z_k}$, la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.
6. Montrer que $f(P_k) = (z_k - 1)P_k$.

Exercice 13 (**)

Soient f, g et h trois endomorphismes d'un même espace vectoriel E vérifiant $f \circ g = h$, $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$.

1. Montrer que f, g et h ont le même noyau et la même image.
2. Montrer que $f^5 = f$.
3. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 14 (**)

Soit $f \in \mathcal{E}$ un endomorphisme nilpotent, où E est de dimension finie n.

1. Montrer que $\ker(f) \neq \{0\}$, et que $\mathrm{rg}(f) \leqslant n - 1$.
2. Soit p le plus petit entier pour lequel $f^p = 0$. Prouver qu'il existe un $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$, et montrer que $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ est une famille libre.
3. En déduire que $p \leqslant n$ et que $f^n = 0$.
4. On suppose que $p = n$. Déterminer toutes les applications linéaires commutant avec f.

Exercice 15 (**)

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par : $\forall P \in E$, $\varphi(P) = 2P - (X-1)P'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $\ker(\varphi)$ est une droite vectorielle dont on précisera une base. L'endomorphisme φ est-il injectif ?
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(1, X)$.
4. Montrer que $\ker(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi) = E$.
5. Soit p la projection vectorielle sur $\ker(\varphi)$ de direction $\mathrm{Im}(\varphi)$. Que valent $\varphi \circ p$ et $p \circ \varphi$?

Exercice 16 (*)

On considère $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel réel, et on note φ l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $\varphi(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que φ est un projecteur.
3. Déterminer l'image et le noyau de φ, ainsi que leurs dimensions.

Exercice 17 (**)

On pose $E = R[X]$ et, pour tout $P \in E$, $f(P) = P - XP'$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y - xy' = 1$. Possède-t-elle des solutions sur R ?
2. Prouver que f est un endomorphisme de E.
3. Déterminer son noyau. L'application f est-elle injective ?
4. L'application f est-elle surjective ?
5. L'application $f \circ f$ est-elle injective ? Surjective ? Déterminer $\ker(f \circ f)$.

Exercice 18 (**)

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2y-2z, x+y-2z, x-y) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est une application linéaire (en revenant vraiment à la définition).
2. Déterminer l'image et le noyau de f. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
3. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
4. Soit p la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$, donner l'expression de $p(x,y,z)$.
5. Calculer $f^2(x,y,z)$ et $f^3(x,y,z)$, et vérifier que $f^3 - f^2 - 2f = 0$.
6. On pose $r = \frac{1}{6}(f^2+f)$ et $s = \frac{1}{3}(f^2-2f)$, montrer que r et s sont des projecteurs, et que $f \circ r = 2r$ et $f \circ s = -s$.
7. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $f^n = 2^n r + (-1)^n s$. En déduire l'expression de $f^n(x,y,z)$.

Exercice 19 (**)

Un endomorphisme f est nilpotent s'il existe un entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $f^n = 0$ (f^n étant la composée de f n fois par elle-même, comme d'habitude).

1. On pose dans cette question $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z-x, 3x+y-2z, x+y) \end{array} \right.$. On admet que cette application est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer le noyau de f (on précisera sa dimension).
   (b) Déterminer l'image de f (on donnera aussi sa dimension).
   (c) Calculer l'expression explicite de $f^2(x,y,z)$.
   (d) Déterminer le noyau de f^2, puis vérifier que $\ker(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.
   (e) En déduire que $f^3 = 0$, et donc que f est nilpotent.
2. On pose dans cette question $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (0,x,y,z) \end{array} \right.$.
   (a) Vérifier que f est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^4$ (sans faire des millions de calcul).
   (b) Définir un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^n$ en prenant f pour exemple.
3. On pose dans cette question $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & Q(X) = P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$.

(a) Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Déterminer le noyau et l'image de f. Sont-ils supplémentaires ?

(c) Montrer que f est nilpotent.

(d) L'endomorphisme de $\mathbb{R}_n([X])$ défini de la même façon que f est-il toujours nilpotent ? Expliquer rapidement pourquoi.

Exercice 20 (**)

On s'intéresse au problème suivant : si E est un espace vectoriel de dimension finie, quels sont les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ pour lesquels $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ (on appellera dans la suite de l'exercice « condition S » le fait que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$) ? Le but de l'exercice est essentiellement d'étudier des cas particuliers de ce problème.

1. Si p est une projection de l'espace vectoriel E, que représentent $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$? En déduire si p vérifie ou non la condition S. Une symétrie d'un espace vectoriel E vérifie-t-elle toujours la condition S ?
2. On note $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par $f(P) = P'$. Cet endomorphisme vérifie-t-il la condition S ?
3. On note désormais $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M) = \dfrac{M + M^\top}{2}$. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer s'il vérifie la condition S.
4. On note cette fois-ci $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $f : E \to E$ l'application définie par $f(P) = \dfrac{1}{2}(X^2 - 1)P'' - XP' + P$.
   (a) Expliquer pourquoi f est bien un endomorphisme de E (sans faire de gros calculs).
   (b) Déterminer explicitement l'image par f du polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
   (c) Déterminer le noyau de l'application f.
   (d) Préciser la dimension de l'image de f, puis en donner une base à l'aide des calculs déjà effectués.
   (e) On note $G = \{Q \in E \mid Q'(1) = Q'(-1) = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E dont on précisera la dimension et une base, puis montrer que $G = \mathrm{Im}(f)$.
   (f) Montrer (sans utiliser la question suivante...) que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
   (g) Montrer que f est en fait un projecteur.
5. On note enfin $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par $f(x, y, z, t) = (0, -3y, 3x - 3z, y)$.
   (a) Déterminer le noyau et l'image de f (on donnera la dimension et une base à chaque fois).
   (b) Vérifier que f satisfait à la condition S.
   (c) Montrer toutefois que f n'est ni un automorphisme, ni un projecteur.

Exercice 21 (**)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où on note I la matrice identité et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note f l'application qui, à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, associe la matrice $f(M) = \dfrac{a+d}{2} I + \dfrac{b+c}{2} J$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace E.
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
3. Démontrer que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - id)$.
4. Montrer que f est un projecteur.
5. Déterminer l'expression de la symétrie s par rapport à $\mathrm{Im}(f)$ et parallèlement à $\ker(f)$.

Exercice 22 (***)

On note f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (x-y+z, -x+3y-2z, -2x+6y-4z)$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f (on en donnera une base).
3. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, et en donner une base.
4. Montrer que $\ker(f) \subset \mathrm{Im}(f)$. Cette inclusion est-elle une égalité ?
5. On note $u = (0,1,0)$, $v = f(u)$ et $w = f(v)$. Calculer v et w, et vérifier que $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Donner les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$.
7. Montrer que $f^3 = 0$ (on pourra utiliser au choix la base $\mathcal{B}$, ou faire des calculs barbares).
8. On pose $g = f + 3\,id$. Exprimer g^2, g^3 puis plus généralement g^k en fonction de f^2, f et de id.
9. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer g^{-1} (quasiment aucun calcul nécessaire). La formule de la question précédente reste-t-elle valable pour des entiers k négatifs ?

Problème (***)

Dans tout cet exercice, on s'intéresse aux propriétés d'un endomorphisme f sur un espace vectoriel réel E, vérifiant $f \circ f = \frac{1}{2}(f + id_E)$. On notera $f \circ f = f^2$ dans tout l'exercice.

I. Une somme directe intéressante.

On note p l'endormorphisme de E défini par $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,id_E$.

1. Montrer que p est un projecteur.
2. Vérifier que $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$.
3. On note q le projecteur sur $\ker(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$, exprimer q comme combinaison linéaire de f et de p.
4. En déduire que $E = \ker(f - id_E) \oplus \ker\left(f + \frac{1}{2}\,id_E\right)$.

II. Expression des puissances de f.

1. Montrer, en utilisant les résultats de la première partie, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q$.
2. Montrer que f est un automorphisme de E.
3. La relation obtenue pour f^n reste-t-elle valable si $n = -1$? Plus généralement si $n \in \mathbb{Z}$?

III. Un exemple concret.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = \left(-2x+y+z, -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z, -3x+y+2z\right)$.

1. Prouver que $f^2 = \frac{1}{2}(f + id_{\mathbb{R}^3})$.
2. Déterminer $\ker(f - id)$ et $\ker\left(f + \frac{1}{2}\,id\right)$, et donner une base de chacun de ces deux noyaux.
3. Déterminer l'expression des projecteurs p et q tels que définis dans la première partie.
4. En déduire l'expression de f^n.