Entraînement pour le DS bilan : corrigé.

MPSI Lycée Camille Jullian

30 mai 2023

Exercice 1 : analyse

1. Il suffit de constater que le dénominateur x^2+3x+2 a pour racines (évidentes) -1 et -2, et donc ne s'annule pas sur l'intervalle $[0,1]$.
2. On écrit $h_0(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2}$. On pose alors $u = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2$, qui a pour limite 0 quand x tend vers 0, et on peut donc développer $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(x^4) = 1 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{9}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}x^3 + \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{27}{8}x^3 - \dfrac{27}{8}x^4 + \dfrac{81}{16}x^4 + o(x^4) = 1 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}x^2 - \dfrac{15}{8}x^3 + \dfrac{31}{16}x^4 + o(x^4)$. Il ne reste plus qu'à ajouter le facteur manquant : $h_0(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{7}{8}x^2 - \dfrac{15}{16}x^3 + \dfrac{31}{32}x^4 + o(x^4)$. On note une curieuse régularité (coefficients de la forme $1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}$) qui laisse penser qu'il existait une méthode plus intelligente pour s'en sortir. En tout cas, on en déduit bien sûr immédiatement les développements des autres fonctions en multipliant simplement par x et par x^2 : $h_1(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{7}{8}x^3 - \dfrac{15}{16}x^4 + o(x^4)$, puis $h_2(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{4}x^3 + \dfrac{7}{8}x^4 + o(x^4)$.
3. On peut effectuer la décomposition en éléments simples de h_0 directement grâce à une petite astuce belge : $\dfrac{1}{x^2+3x+2} = \dfrac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$. On en déduit que $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\,dt = [\ln(t+1) - \ln(t+2)]_0^1 = \ln(2) - \ln(3) + \ln(2) = 2\ln(2) - \ln(3)$.
4. La fonction g est bien sûr dérivable sur $[0,1]$, et $g'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+2} = 2h_1(x) + 3h_0(x)$. On en déduit que $2u_1 + 3u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t+3}{t^2+3t+2}\,dt = [\ln(t^2+3t+2)]_0^1 = \ln(6) - \ln(2) = \ln(3)$. On a donc $2u_1 = \ln(3) - 3u_0 = 4\ln(3) - 6\ln(2)$, donc $u_1 = 2\ln(3) - 3\ln(2)$.
5. Commençons par calculer la partie entière de cette décomposition en effectuant une division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^4 & & & & & & & X^2+3X+2 \\ \hline
- & (X^4 & + & 3X^3 & + & 2X^2) & & & X^2-3X+7 \\
 & & - & 3X^3 & - & 2X^2 & & & \\
 & & + & (3X^3 & + & 9X^2 & + & 6X) & \\
 & & & & & 7X^2 & + & 6X & \\
 & & & & - & (7X^2 & + & 21X \quad + \quad 14) & \\
 & & & & & & - & 15X \quad - \quad 14 &
\end{array}$$

Notre partie entière vaut donc $X^2 - 3X + 7$. Les deux parties polaires se calculent classiquement : $\dfrac{X^4}{X^2+3X+2} = X^2 - 3X + 7 + \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{X+2}$. En multipliant par $X+1$ avant de poser $X=-1$, on trouve $a=1$. En multipliant par $X+2$ avant de poser $X=-2$, on trouve $b=-16$. Finalement $\dfrac{X^4}{X^2+3X+2}=X^2-3X+7+\dfrac{1}{X+1}-\dfrac{16}{X+2}$, puis $u_4=\left[\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{3}{2}t^2+7t+\ln(t+1)-16\ln(t+2)\right]_0^1=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}+7+\ln(2)-16\ln(3)+16\ln(2)=\dfrac{35}{6}+17\ln(2)-16\ln(3)$.

6. (a) Il suffit de rappeler que, $\forall x\in[0,1]$, $x^n\geqslant x^{n+1}$, donc $\dfrac{x^n}{x^2+3x+2}\geqslant\dfrac{x^{n+1}}{x^2+3x+2}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on trouve immédiatement $I_n\geqslant I_{n+1}$, la suite est bien décroissante. Comme par ailleurs (u_n) est minorée de façon évidente par 0, elle converge.

   (b) Pour tout réel positif, $x^2+3x+2\geqslant 2$, donc $u_n\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{2}\,dt=\frac{1}{2(n+1)}$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim u_n=0$.

7. (a) De façon évidente, $u_{n+2}+3u_{n+1}+2u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+2}+3t^{n+1}+2t^n}{t^2+3t+2}\,dt=\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n+1}$.

   (b) D'après la décroissance de la suite, $u_{n+2}+3u_{n+1}+2u_n\leqslant 6u_n$, donc $6u_n\geqslant\dfrac{1}{n+1}$, dont découle l'inégalité de gauche de l'encadrement demandé. Mais, toujours à l'aide de la décroissance de (u_n), $u_{n+2}+3u_{n+1}+2u_n\geqslant 6u_{n+2}$, donc $u_{n+2}\geqslant\dfrac{1}{6(n+1)}$, ce qui, à un petit décalage près, donne l'autre inégalité demandée.

   (c) En multipliant tout l'encadrement précédent par n, on obtient pour nu_n un minorant et un majorant ayant la même limite égale à $\dfrac{1}{6}$. D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim nu_n=\dfrac{1}{6}$, soit $u_n\sim\dfrac{1}{6n}$.

Exercice 2 : algèbre

1. (a) Un calcul épuisant permet d'obtenir $A^2=\begin{pmatrix}10&6\\6&10\end{pmatrix}=6J+4I_2$ (les coefficients endehos de la diagonale imposant $b=6$, et on en déduit aisément la valeur de a). Si on a peur de se tromper sur la relation, on remarque qu'elle est donnée par l'énoncé deux question plus loin.

   (b) Ça c'est vraiment hyper classique : $J^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2J$.

   (c) On va naturellement supposer que la formule est à prouver pour $n\in\mathbb{N}$. Histoire d'appliquer la formule obtenue à la question a, on va même faire une récurrence double (c'est totalement superflu). Pour $n=0$, la formule stipule que $A^0=I_2$, ce qui est vrai. Pour $n=1$, elle prétend que $A=-2I+3J$, ce qui se vérifie également facilement. Supposons donc la formule vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$, alors $A^{n+2}=A^2\times A^n=(6J+4I_2)\times\left((-2)^nI_2+\dfrac{1}{2}(4^n-(-2)^n)J\right)=(-3)\times(-2)^{n+1}J+3(4^n-(-2)^n)J^2+(-2)^{n+2}I_2+2(4^n-(-2)^n)J=(-2)^{n+2}I_2+J\left(\dfrac{3}{2}(-2)^{n+2}+8(4^n-(-2)^n)\right)=(-2)^{n+2}I_2-\dfrac{1}{2}(-2)^{n+2}J+\dfrac{1}{2}\times 4^{n+2}J$, qui est bien la formule souhaitée.

   (d) Il suffit de faire l'addition : $A^n=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4^n+(-2)^n&4^n-(-2)^n\\4^n-(-2)^n&4^n+(-2)^n\end{pmatrix}$.

   (e) On prouve par une récurrence triviale que, $\forall k\geqslant 1$, $J^k=2^{k-1}J$. Les matrices I_2 et J commutant on peut appliquer la formule du binôme de Newton en partant de l'égalité

$A = 3J - 2I_2$ pour obtenir $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3J)^k (-2I_2)^{n-k}$. On isole le premier terme de la somme et on remplace dans tout le reste de la somme J^k par l'expression signalée ci-dessus : $A^n = (-2)^n I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{k-1} (-2)^{n-k} J = (-2)^n I_2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} 6^k (-2)^{n-k} \right) J = (-2)^n I_2 + \frac{1}{2}(4^n - (-2)^n) J$ (il ne faut pas oublier de soustraire le terme numéro 0 qui manque à la dernière somme pour y reconnaître un binôme de Newton). On retrouve bien sûr la formule précédente.

2. (a) Il s'agit ici d'écrire matriciellement une relation de la forme $A^2 = \alpha A + \beta I_2$, donc légèrement différente de celle obtenue en début d'exercice. Les coefficients en-dehors de la diagonale imposent $\alpha = 2$, et on en déduit $\beta = 8$ en observant la digonale. Bien entendu, cette relation matricielle implique $f^2 = 2f + 8\,id$.

   (b) On constate que $(f - 4\,id) \circ (f + 2\,id) = f^2 - 2f - 8\,id = 0$ d'après la question précédente. Si par exemple $f - 4\,id$ était une application bijective, on pourrait composer cette égalité par sa réciproque pour obtenir $f + 2\,id = 0$, ce qui est manifestement faux (la matrice A n'est pas égale à $-2I_2$). On prouve exactement de la même façon que $f - 4\,id$ n'est pas non plus bijective.

   (c) En écrivant explicitement $f(x, y) = (x + 3y, 3x + y)$, on cherche donc les vecteurs $u(x, y)$ vérifiant $f(u) = 4u$, ce qui donne les deux équations $x + 3y = 4x$, soit $3y - 3x = 0$, et $3x + y = 4y$, soit $3x - 3y = 0$. Les deux équations sont équivalentes et donnent l'unique condition $y = x$, donc $\ker(f - 4\,id) = \text{Vect}((1, 1))$. De même la condition $f(u) = -2u$ se ramène aux deux équations $3x + 3y = 3x + 3y = 0$. La résolution est à nouveau triviale : $\ker(f + 2\,id) = \text{Vect}((1, -1))$.

   (d) La famille $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (les deux vecteurs n'ont pas l'air d'être proportionnels), et il s'agit d'une base de vecteurs propres dans laquelle la matrice de f est égale à $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   (e) La matrice P est par définition égale à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour obtenir son inverse, on résoud par exemple le système constitué par les deux équations $x + y = a$ et $x - y = b$. La somme et la différence des deux équations donnent immédiatement $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ et $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Autrement dit, $P^{-1} = \frac{1}{2}P$. Les plus paresseux pouvaient aussi remarquer directement que $P^2 = 2I_2$ et conclure à partir de là.

   (f) C'est évidemment la formule de changement de base du cours : $D = P^{-1}AP$ ou $A = PDP^{-1}$.

3. (a) On constate que les relations de récurrence définissant les suites imposent $X_{n+1} = AX_n$. C'est ensuite une récurrence triviale : au rang 0, $A^0 X_0 = X_0$, et si on suppose la formule vérifiée au rang n alors $X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = A^{n+1} X_0$.

   (b) Par hypothèse, $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, il ne reste plus qu'à effectuer le produit par A^n pour obtenir $v_n = \frac{3}{2}(4^n + (-2n)^n) + \frac{1}{2}(4^n - (-2)^n) = 2 \times 4^n + (-2)^n$, et $w_n = \frac{1}{2}(4^n + (-2)^n) + \frac{3}{2}(4^n - (-2)^n) = 2 \times 4^n - (-2)^n$.

4. (a) On va effectuer une dernière petite récurrence : $u_0 = 3$ et $\frac{v_0}{w_0} = \frac{3}{1} = 3$, donc la propriété est initialisée. Supposons la formule vérifiée au rang n, alors $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{3u_n + 1} = \frac{\frac{v_n}{w_n} + 3}{\frac{3v_n}{w_n} + 1} = \frac{v_n + 3w_n}{3v_n + w_n} = \frac{v_{n+1}}{w_{n+1}}$, ce qui prouve l'hérédité.

(b) En simplifiant tout par 2, on peut écrire $u_n = \dfrac{4^n - (-2)^{n-1}}{4^n + (-2)^{n-1}}$. Quelle que soit l'écriture choisie, $u_n \sim \dfrac{4^n}{4^n}$, ce qui prouve que la suite converge vers 1.

Exercice 3 : probabilités

1. C'est trivial : le mobile est en position 0 au départ, donc sera en position 1 avec probabilité $\dfrac{1}{3}$ et en position 0 avec probabilité $\dfrac{2}{3}$ après un déplacement. On a bien $X_1 \sim \mathcal{B}\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$, et en découle $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{3}$.
2. (a) Puisqu'on avance au maximum d'un pas à chaque déplacement, on ne peut pas avoir de valeur plus grande que 2, et on ne peut bien sûr pas descendre en-dessous de 0. De plus, les trois valeurs sont bien atteignables : 2 si on avance deux fois de suite, 1 si on reste à 0 au premier pas mais qu'on avance ensuite, et 0 si on revient à 0 lors du deuxième pas.

   (b) En reprenant les explications de la question précédente, $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$ (on doit avancer deux fois), et $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$ (on reste en 0 puis on avance), ce qui laisse logiquement $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \dfrac{2}{3}$, ce qui est normal (peu importe le résultat du premier déplacement, on doit revenir à 0 lors du deuxième).

   (c) Calculons : $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{2}{9} + 2 \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{4}{9}$.
3. On aura logiquement $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Le plus simple est de le prouver par récurrence. On a déjà largement initialisé lors des questions précédentes. Si on suppose $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, la possibilité d'avancer d'une case au déplacement $n+1$ prouve que $\{1, 2 \dots, n+1\} \subset X_{n+1}(\Omega)$, et on doit ajouter à cet ensemble la valeur 0 qui peut être atteinte lors de n'importe quel déplacement.
4. (a) C'est simplement du au fait qu'on ne peut pas sauter de case : on atteindra la case numéro k seulement à partie de la case $k-1$, sauf bien sûr dans le cas très particulier où $k = 0$.

   (b) La seule possiblité est d'être en position $k-1$ au temps $n-1$ et d'avancer, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{3}$. Si on veut faire très savant, on invoque la formule des probabilités totales : les évènements $X_{n-1} = i$ forment un système complet d'évènements, et la seule probabilité conditionnelle non nulle est $\mathbb{P}_{X_{n-1}=k-1}(X_n = k) = \dfrac{1}{3}$, donc découle la formule.

   (c) On va encore appliquer la formule des probabilités totales, mais cette fois-ci toutes les probabilités conditionnelles sont égales : $\mathbb{P}_{X_{n-1}=i}(X_n = 0) = \dfrac{2}{3}$ quelle que soit la valeur de i. On en déduit que $\mathbb{P}(X_n = 0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{2}{3} \times \mathbb{P}(X_{n-1} = i) = \dfrac{2}{3}$ (la somme des probabilités étant bien sûr égale à 1).
5. (a) On le prouve simplement par récurrence sur l'entier n, simultanément pour toutes les valeurs de k. L'initialisation est triviale, et l'hérédité découle de la question 4.b : $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{3}\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3^{k-1}}\mathbb{P}(X_{n-1-k+1} = 0) = \dfrac{1}{3^k}\mathbb{P}(X_{n-k} = 0)$.

   (b) On en déduit que $\mathbb{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{3^n}\mathbb{P}(X_0 = 0) = \dfrac{1}{3^n}$.

   (c) On a simplement $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{3^k} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3^{k+1}}$ pour tout entier $k < n$ (la formule fonctionne également pour $k = 0$) et $\mathbb{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{3^n}$.

6. (a) Puisque la valeur 0 n'intervient pas dans le calcul de l'espérance, c'est une conséquence immédiate de la question 4.b.

   (b) On développe à coup d'astuce belge : $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) + \mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(X_{n-1} = k) + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X_{n-1} = k) = \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{3}$.

   (c) Posons $u_n = \mathbb{E}(X_n)$. La suite (u_n) est arithémtico-géométrique, d'équation de point fixe $x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, qui a pour solution $x = \frac{1}{2}$. On pose donc $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ et on constate que $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. On en déduit que $v_n = -\frac{1}{2 \times 3^n}$, puis $u_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$. On constate en particulier que $\mathbb{E}(X_n)$ a une limite égale à $\frac{1}{2}$ (en gros, le mobile ne va jamais avancer beaucoup...).