Entraînement pour le DS bilan.

MPSI Lycée Camille Jullian

30 mai 2023

Ce TD est constitué de trois des quatre exercices d'un vieux sujet de concours d'entrée aux écoles de commerce. J'ai à peine retouché les deux premiers exercices pour les rendre un peu plus conformes à l'esprit de votre filière, et j'ai supprimé le dernier qui portait sur des choses qui ne sont absolument pas à votre programme. La difficulté des exercices n'est (volontairement) pas très élevée, le but est de refaire un petit tour de choses qu'on n'a pas travaillées ensemble depuis un certain temps.

Exercice 1 : analyse

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction h_n par $h_n(x) = \dfrac{x^n}{x^2+3x+2}$, et on note $u_n = \displaystyle\int_0^1 h_n(t)\,dt$.

1. Vérifier que les fonctions h_n sont définies et continues sur $[0,1]$.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction h_0. En déduire celui des fonctions h_1 et h_2.
3. Calculer la valeur de u_0.
4. Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \ln(x^2+3x+2)$, en déduire la valeur de u_1.
5. Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction $F = \dfrac{X^4}{X^2+3X+2}$. En déduire la valeur de u_4.
6. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, en déduire sa convergence.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)}$, en déduire la limite de (u_n).
7. (a) Calculer $u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n$.
   (b) En déduire que, $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{6(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{6(n-1)}$.
   (c) En déduire un équivalent simple de u_n.

Exercice 2 : algèbre

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aJ + bI_2$.
   (b) Calculer J^2 en fonction de J.
   (c) Montrer par récurrence que $A^n = (-2)^n I_2 + \dfrac{1}{2}(4^n - (-2)^n)J$.
   (d) Donner l'expression explicite de la matrice A^n.
   (e) Retrouver ce résultat directement à l'aide de la formule du binôme de Newton.
2. On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme ayant pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Déterminer une relation vérifiée par f de la forme $f^2 + \alpha f + \beta\, id = 0$.

(b) Déduire de la question précédente que les applications $f - 4\,id$ et $f + 2\,id$ ne peuvent pas être bijectives (une rédaction rigoureuse est attendue).

(c) Donner les vecteurs propres pour f correspondant aux valeurs propres 4 et -2.

(d) En déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D, et préciser cette matrice.

(e) Donner la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, et calculer son inverse P^{-1}.

(f) Rappeler la relation liant les matrices A, D et P.

3. On note (v_n) et (w_n) les deux suites définies par les relations de récurrence $w_{n+1} = 3v_n + w_n$ et $v_{n+1} = v_n + 3w_n$, ainsi que les conditions initiales $v_0 = 3$ et $w_0 = 1$. On notera également $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

   (b) En déduire les expressions de v_n et de w_n en fonction de n.

4. On considère enfin la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{3u_n + 1}$.

   (a) Montrer que $u_n = \dfrac{v_n}{w_n}$.

   (b) En déduire l'expression de u_n et sa limite éventuelle.

Exercice 3 : probabilités

Un mobile se déplace aléatoirement le long d'un axe horizontal d'origine O, sur des points à coordonnées entières, positives ou nulles. Les déplacements sont effectués suivant le protocole suivant :

- à l'instant zéro, le mobile est sur l'origine O d'abscisse 0.
- si le mobile se trouve l'instant n sur le point d'abscisse k, alors il sera à l'instant $n+1$ soit sur le point d'abscisse $k+1$ avec probabilité $\dfrac{1}{3}$, soit sur le point O avec probabilité $\dfrac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n.

1. Vérifier que X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{3}$. Que vaut $\mathbb{E}(X_1)$?

2. (a) Montrer que $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.

   (c) Calculer $\mathbb{E}(X_2)$.

3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable X_n.

4. (a) Expliquer pourquoi, pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'évènement $(X_n = k)$ est inclus dans l'évènement $(X_{n-1} = k-1)$.

   (b) Montrer que $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{3}\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)$.

   (c) Montrer rigoureusement que, $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = \dfrac{2}{3}$.

5. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{3^k}\mathbb{P}(X_{n-k} = 0)$.

   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X_n = n)$.

   (c) Donner la loi de la variable X_n.

6. (a) Montrer que $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)$.

   (b) En déduire la relation de récurrence $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{3}\mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{3}$.

   (c) Déterminer l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n.