Devoir de rentrée : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

1er septembre 2022

1. On effectue l'IPP en posant $u(x) = x$, et donc $u'(x) = 1$, et $v'(x) = e^{-x}$ qu'on peut intégrer en $v(x) = -e^{-x}$. On obtient alors $I = [-xe^{-x}]_1^2 + \int_1^2 e^{-x}\ dx = -2e^{-2} + e^{-1} - [e^{-x}]_1^2 = -2e^{-2} + e^{-1} - e^{-2} + e^{-1} = \frac{2}{e} - \frac{3}{e^2}$.
2. On calcule bien sûr le discriminant de l'équation $\Delta = 25 - 24 = 1$. L'équation a donc deux racines réelles : $x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$. On peut aussi se rendre compte immédiatement que 1 est une solution évidente de l'équation et en déduire la deuxième solution (par exemple si on connait des formules du genre $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, en notant a, b et c les coefficients de l'équation du second degré).
3. La primitive la plus simple est $F : x \mapsto -\frac{1}{2x^2}$ (on devrait théoriquement préciser l'intervalle de validité, ici $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$).
4. Une fois qu'Alice a choisi son nombre, quel que soit son choix, Bob a six choix possibles, dont un est celui d'Alice. La probabilité vaut donc tout simplement $\frac{1}{6}$.
5. Il vaut mieux écrire tous les 10 sous la forme 2×5 pour simplifier ce qu'on peut : $A = \frac{5^6 \times 2^{-15} \times 5^{-15}}{5^5 \times 2^{-15} \times 5^{-15}} \times \frac{2^4 \times 5^4}{5^2} = 2^4 \times 5^3 = 10^3 = 2\ 000$.
6. Si (u_n) et (w_n) sont deux suites réelles convergeant vers une même limite l, et (v_n) une troisième suite vérifiant $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ (au moins à partir d'un certain rang), alors la suite (w_n) est également convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.
7. On multiplie par le conjugué du dénominateur : $z = \frac{(3-4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6-8i+3i+4}{4+1} = 2-i$.
8. On utilise la formule de dérivée d'un quotient, en faisant attention aux signes : $f'(x) = \frac{(\cos(x)-\sin(x))(\sin(x)-\cos(x)) - (\cos(x)+\sin(x))(\sin(x)+\cos(x))}{(\sin(x)-\cos(x))^2}$
$= -\frac{\cos^2(x) - 2\cos(x)\sin(x) + \sin(x) + \cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \sin^2(x)}{(\sin(x)-\cos(x))^2} = -\frac{2}{(\sin(x)+\cos(x))^2}$
en utilisant la formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
9. En notant $u(x) = \sin(x) - \cos(x)$, on constate que $f = \frac{u'}{u}$, une primitive de f (sur tout intervalle où cette dernière fonction est définie) est donc $F : x \mapsto \ln(|\sin(x) - \cos(x)|)$ (la valeur absolue est indispensable sur les intervalles où $u(x) < 0$).
10. L'expression est de la forme $(a-b)(a+b)$, on peut donc exploiter directement une identité remarquable pour écrire $A = (5\sqrt{3})^2 - (7\sqrt{2})^2 = 75 - 98 = -23$.
11. C'est du cours : $y(x) = Ke^{-2x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

12. Si on ne veut pas s'embêter, il y a donc 24 filles, dont 12 adorent les hippopotames, et 12 garçons, dont 4 adorent les hippopotames. Au total, 16 élèves adorent les hippopotames, et les trois quarts d'entre eux (douze sur les seize) sont des filles, la probabilité recherchée est donc de $\frac{3}{4}$. On peut aussi formeliaser les choses, bien entendu (et notamment exploiter des probabilités conditionnelles).

13. Sur le cercle trigonométrique, il y a deux points correspondant à un cosinus égal à $-\frac{1}{2}$, obtenus pour les angles $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ (ou $\frac{4\pi}{3}$ si on préfère). Les solutions de l'équation sont donc tous les réels de la forme $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

14. On calcule simplement le produit scalaire : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 4 - 6 + 2 = 0$, donc les deux vecteurs sont orthogonaux.

15. Les cas classiques sont « $(+\infty) + (-\infty)$ », « $\frac{0}{0}$ »et « $\frac{\infty}{\infty}$ »(quels que soient les signes pour ce dernier), ainsi que $0 \times \infty$. On rajoutera quelques autres cas à cette liste en cours d'année, comme 1^∞ ou 0^0.

16. Pour une suite géométrique de raison q, $u_6 = u_4 \times q^2$, ce qui permet ici d'obtenir $q^2 = 4$, donc $q = \pm 2$ (il y a bien **deux** suites géométriques vérifiant les conditions données). Comme $u_4 = u_0 \times q^4$, on aura alors $u_0 = \frac{u_4}{16} = \frac{1}{8}$ (dans les deux cas).

17. On calcule d'abord le module $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, puis on factorise : $z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Un argument de z est donc $-\frac{\pi}{3}$.

18. L'inégalité est vérifiée si on a $3x-1 \geqslant 2$ ou $3x-1 \leqslant -2$, donc si $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -\frac{1}{3}$. Finalement, $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty[$.

19. C'est du cours : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

20. Si on veut être rigoureux, on décompose le numérateur sous la forme $\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ en exploitant la propriété fondamentale $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. Il n'y a maintenant plus de forme indéterminée puisque $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}$ et que le quotient restant tend vers 0 (le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers $+\infty$, ce qui prouve que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = 1$.