

Programme de colle n° 28

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 30/05 au 02/06 2023

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 22 : Fractions rationnelles.

- Corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$: définition, opérations élémentaires sur les fractions rationnelles, représentant irréductible d'une fraction, degré, dérivée d'une fraction, pôles et racines.
- Décomposition en éléments simples : partie entière, théorème de décomposition en éléments simples (deux versions, l'une complexe, l'autre réelle, aucune n'a été démontrée), calcul effectif des décompositions (on peut utiliser les techniques suivantes : pour un pôle simple, produit par $X - a$ puis évaluation pour $X = a$, ou calcul de $\frac{P(a)}{Q'(a)}$; pour un pôle double, calcul de $G(a)$ et $G'(a)$ après avoir posé $G = (X - a)^2 F$; utilisation de l'évaluation en une valeur non polaire ou d'un calcul de limite ; divisions euclidiennes successives dans le cas d'un dénominateur de la forme $(X^2 + aX + b)^k$ dans $\mathbb{R}(X)$).

Chapitre 23 : Variables aléatoires.

- Vocabulaire général : variable aléatoire réelle, univers-image $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable X , loi d'une variable aléatoire (qui sera par défaut présentée sous forme de tableau puisqu'on travaillera toujours sur un univers fini), opérations élémentaires sur les variables aléatoires (somme, max, min, composition par une fonction réelle), variable aléatoire indicatrice d'un événement.
- Moments d'une variable aléatoire :
 - espérance $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}(X = k)$, linéarité de l'espérance, positivité de l'espérance, variable aléatoire centrée, théorème du transfert.
 - variance $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$, positivité de la variance, **formule** $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$, **formule de König-Huygens** $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ (qui devra être utilisée de façon automatique pour les calculs de variance), variable aléatoire réduite, définition de l'écart-type $\sigma(X)$.

- **inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev** (aucun exercice n'a été traité sur le sujet)
- Lois usuelles :
 - loi uniforme à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$, **espérance et variance**
 - loi de Bernoulli de paramètre p
 - schéma de Bernoulli, loi binômiale de paramètre (n, p) , **espérance et variance** (calculées brutalement à coup de binôme de Newton)
- Couples de variables aléatoires :
 - loi conjointe d'un couple (X, Y) , lois marginales, loi conditionnelle de Y sachant $X = k$
 - indépendance de variables aléatoires, lemme des coalitions, formule $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ dans le cas de l'indépendance, somme de variables indépendantes suivant des lois $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$
 - covariance de deux variables aléatoires, propriétés classiques (symétrie, bilinéarité, positivité, « théorème de Pythagore » $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$, corollaire sur la linéarité de la variance pour des variables indépendantes), coefficient de corrélation et interprétation du signe de ce coefficient

Prévisions pour la semaine prochaine : groupe symétrique, déterminants.