Programme de colle n$^{\text{o}}$ 25

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 02/05 au 05/05 2023

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 19 : Intégration.

- Construction de l'intégrale de Riemann :
  - — continuité uniforme, **théorème de Heine**
  - — espace vectoriel des fonctions en escalier sur un segment, subdivisions adaptées, intégrale des fonctions en escalier, propriétés fondamentales de cette intégrale (linéarité, relation de Chasles, positivité)
  - — fonctions continues pas morceaux sur un segment, approximation par les fonctions en escalier, définition de l'intégrale comme borne supérieure des intégrales de fonctions en escalier minorant f, égale à la borne inférieure des intégrales de fonctions en escalier majorant f
  - — extension des propriétés fondamentales à l'intégrale des fonctions continues par morceaux
- Inégalités et intégrales :
  - — intégration d'inégalités sur un segment
  - — si f est continue et positive sur $[a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = 0$ ssi $f = 0$
  - — inégalité triangulaire $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ dt$
  - — **inégalité de Cauchy-Schwartz** $\displaystyle\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$ (démontrée en étudiant le signe d'un trinôme)
  - — valeur moyenne d'une fonction sur un segment
- Exemples d'études de suites d'intégrales.
- **théorème fondamental de l'analyse** : $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est la primitive de f s'annulant en a, étude de fonctions définies par des intégrales à bornes variables (exemple vu en cours : $\displaystyle f(x) = \int_x^{2x} \frac{\text{sh}(t)}{t}\ dt$).
- Extension de l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes.
- **Formule de Taylor avec reste intégral**, inégalité de Taylor-Lagrange (la formule avec égalité n'est par contre offociellement pas au programme même si on l'a citée en cours).
- Sommes de Riemann.

Chapitre 20 : Matrices et algèbre linéaire.

- Matrices représentatives d'applications linéaires :
  - — matrice d'une famille de vecteurs dans une base, $\mathcal{F}$ est une base si sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est inversible
  - — matrice représentative $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de $f \in \mathcal{L}(E,F)$ dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des espaces E et F
  - — **calcul de l'image d'un vecteur (dont les coordonnées sont représentées sous forme de matrice-colonne) à l'aide de la matrice représentative**
  - — matrice représentative d'une combinaison linéaire et d'une composée d'applications linéaires
  - — un endomorphisme est bijectif ssi sa matrice est inversible
- Changement de bases :
  - — matrice de passage d'une base vers une autre, expression de l'inverse d'une matrice de passage comme matrice de passage « dans l'autre sens »
  - — formule $X = PX'$ pour les matrices colonnes de coordonnées d'un vecteur dans deux bases distinctes
  - — formules de changement de bases $N = Q^{-1}MP$ et $N = P^{-1}MP$ (pour un endomorphisme)
  - — matrices équivalentes et matrices semblables, ces deux relations sont des relations d'équivalence
  - — quelques exemples simples de diagonalisation ont été vus en cours, le vocabulaire (valeur propre, vecteur propre, diagonalisabilité) est normalement connu mais n'est pas au programme en première année

Prévisions pour la semaine suivante : algèbre linéaire (avec matrices), probas.