# Programme de colle n$^{\text{o}}$ 24

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 24/04 au 28/04 2023

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

## Chapitre 19 : Applications linéaires.

- Vocabulaire : application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Notations $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(E)$ et $GL(E)$, dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ quand $E$ et $F$ sont de dimension finie.
- Noyau et image d'une application linéaire : définition, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'un morphisme, calcul de l'image sous la forme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ quand $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de l'espace de départ de l'application linéaire.
- $\mathcal{L}(E)$ est un anneau, et $GL(E)$ un groupe, notation $f^n$ pour désigner les composées successives d'un endomorphisme par lui-même.
- Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire, **théorème du rang**.
- Équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour un endomorphisme en dimension finie (un contre-exemple a été vu en dimension infinie). Majoration du rang d'une composée : $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.
- Formes linéaires et hyperplans, un hyperplan $H$ est supplémentaire de toute droite qui n'est pas incluse dans $H$.
- Applications linéaires « géométriques » :
  - homothéties
  - projection sur un sous-espace $F$ parallèlement à un sous-espace supplémentaire $G$, **caractérisation des projections par la relation** $p^2 = p$, caractérisation des sous-espaces $F$ et $G$ comme image et noyau de la projection $p$, caractérisation de l'image comme $\ker(p - \mathrm{id})$
  - symétrie par rapport à un sous-espace $F$ parallèlement à un sous-espace supplémentaire $G$, caractérisation des symétries par la relation $s^2 = \mathrm{id}$, caractérisation des sous-espaces $F$ et $G$ comme noyaux de $s - \mathrm{id}$ et de $s + \mathrm{id}$, relation $s = 2p - \mathrm{id}$ entre symétrie et projection ayant les mêmes éléments caractéristiques

## Chapitre 19 : Intégration.

- Construction de l'intégrale de Riemann :
  - continuité uniforme, **théorème de Heine**

— espace vectoriel des fonctions en escalier sur un segment, subdivisions adaptées, intégrale des fonctions en escalier, propriétés fondamentales de cette intégrale (linéarité, relation de Chasles, positivité)
— fonctions continues pas morceaux sur un segment, approximation par les fonctions en escalier, définition de l'intégrale comme borne supérieure des intégrales de fonctions en escalier minorant $f$, égale à la borne inférieure des intégrales de fonctions en escalier majorant $f$
— extension des propriétés fondamentales à l'intégrale des fonctions continues par morceaux

- Inégalités et intégrales :
  — intégration d'inégalités sur un segment
  — si $f$ est continue et positive sur $[a, b]$, $\int_a^b f(t)\, dt = 0$ ssi $f = 0$
  — inégalité triangulaire $\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt$
  — **inégalité de Cauchy-Schwartz** $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$ (démontrée en étudiant le signe d'un trinôme)
  — valeur moyenne d'une fonction sur un segment
- Exemples d'études de suites d'intégrales.
- **théorème fondamental de l'analyse** : $\int_a^x f(t)\, dt$ est la primitive de $f$ s'annulant en $a$, étude de fonctions définies par des intégrales à bornes variables (exemple vu en cours : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}(t)}{t}\, dt$).
- Extension de l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes.
- **Formule de Taylor avec reste intégral**, inégalité de Taylor-Lagrange (la formule avec égalité n'est par contre offociellement pas au programme même si on l'a citée en cours).
- Sommes de Riemann.

Prévisions pour la semaine de la rentrée : matrices d'applications linéaires.