

Programme de colle n° 21

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 20/03 au 24/03 2023

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 17 : Espaces vectoriels.

- Définitions et exemples d'espaces et de sous-espaces vectoriels.
- Caractérisation des sous-espaces vectoriels (au choix : non vide et stable par somme et produit extérieur, ou non vide et stable par combinaisons linéaires).
- Familles de vecteurs :
 - Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs, sous-espace vectoriel engendré par une famille, notation Vect et exemples d'utilisation (notamment pour les solutions de systèmes linéaires homogènes)
 - Familles génératrices, familles libres et liées (notion de dépendance linéaire entre vecteurs), bases, coordonnées et composantes d'un vecteur dans une base
- Intersection de sous-espaces vectoriels, somme et somme directe de sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels supplémentaires, caractérisation à l'aide de bases (F et G sont supplémentaires si et seulement si l'union d'une base de F et d'une base de G donne une base de E).
- Dimension :
 - définition d'un espace vectoriel de dimension finie (comme un espace qui admet une famille génératrice finie)
 - théorème de la base incomplète (on doit être capable d'appliquer l'algorithme permettant de compléter une famille libre en base d'un espace vectoriel en piochant des vecteurs dans une famille génératrice)
 - existence de bases dans un espace de dimension finie, lemme de Steinitz, définition de la dimension (toutes les bases ayant le même cardinal)
 - dans un espace de dimension n , toute famille libre (resp. génératrice) est constituée d'au plus (resp. au moins) n vecteurs, toute famille libre OU génératrice de n vecteurs est automatiquement une base
 - formule de Grassmann pour la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
 - caractérisations de la supplémentarité à l'aide de la dimension (F et G sont supplémentaires s'ils vérifient deux conditions parmi $F \cap G = \{0\}$, $F+G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$)

- Espaces vectoriels usuels :
 - \mathbb{R}^n est un espace vectoriel de dimension n admettant pour base canonique $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$
 - $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension np admettant pour base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, où E_{ij} est la matrice dont l'unique coefficient non nul est en position (i, j) , et est égal à 1
 - $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$ admettant pour base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, toute famille échelonnée de polynômes est libre
- aucune formule n'a été indiquée en gras pour ce chapitre mais on doit être capable de démontrer des résultats faciles comme « l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel » ou « l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs est un sous-espace vectoriel », et de donner une idée de la démonstration des résultats importants (formule de Grassmann, lemme de Steinitz).

Chapitre 17 : Analyse asymptotique.

- Négligeabilité et équivalence :
 - définition pour les suites (sous la forme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$), notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$
 - manipulations et règles de calcul (produits et quotients, passage des équivalents à une puissance quelconque, équivalence entre $u_n \sim v_n$ et $u_n = v_n + o(v_n)$, on a bien sûr insisté sur l'interdiction d'additionner des équivalents ou de les composer par d'autres fonctions que les fonctions puissances), on autorise les abus de notation du type « $o(v_n) + o(v_n) = o(v_n)$ »
 - extension aux fonctions réelles
 - croissances comparées, équivalents classiques issus de taux d'accroissements $(\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x)$

Prévisions pour la semaine suivante : analyse asymptotique (avec les DL).