

Programme de colle n° 18

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 27/02 au 03/03 2023

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 13 : Dérivation

- Dérivation, vocabulaire et formulaire :
 - taux d'accroissement $\tau_{a,f}$ d'une fonction f en a , interprétation graphique comme pente de la droite reliant les points de la courbe d'abscisses a et $a + h$, définition de $f'(a)$ comme limite du taux d'accroissement, fonction dérivable en a et dérivable sur un intervalle I
 - dérivée à gauche ou à droite en a (notées $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$), demi-tangentes à la courbe quand les deux valeurs sont distinctes, existence de tangentes verticales en cas de limite infinie du taux d'accroissement
 - équation de la tangente en a à la courbe représentative de f , développement limité à l'ordre 1 de f en a (écrit sous la forme $f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$)
 - démonstration des diverses formules de dérivation (**somme, produit, inverse, quotient**, composée, réciproque)
 - dérivées successives d'une fonction, notation $f^{(n)}$, fonctions de classe \mathcal{C}^k , \mathcal{D}^k et \mathcal{C}^∞ sur un intervalle, formule de Leibniz pour la dérivée n -ème d'un produit
- Théorèmes faisant intervenir la dérivation :
 - si f est dérivable sur $[a, b]$ et admet un extremum en $x \in]a, b[$, alors $f'(x) = 0$ (**démonstration** à connaître)
 - théorème de Rolle
 - théorème des accroissements finis (sa **démonstration** à l'aide du théorème de Rolle est à connaître)
 - application du TAF à l'étude des variations
 - théorème de prolongement de la dérivée (si f est dérivable sur $]a, b[$, continue en a et f' admet une limite l en a , alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$)
 - inégalité des accroissements finis (deux versions, une avec une hypothèse du type $m \leq f'(x) \leq M$ sur un intervalle I , une autre où on a une hypothèse de majoration de $|f'|$)
- Étude de suites récurrentes :
 - vocabulaire de base (suite récurrente, intervalle stable par une fonction f , point fixe d'une fonction)
 - la limite éventuelle d'une suite récurrente est un point fixe de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$
 - utilisation de l'IAF pour démontrer la convergence et éventuellement obtenir des informations sur la vitesse de convergence d'une suite récurrente (u_n) (aucune connaissance

spécifique n'est exigée mais les élèves doivent connaître le fonctionnement global, et notamment savoir quand faire des récurrences)

- Extension des définitions de limite, continuité, dérivabilité aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, avec $I \subset \mathbb{R}$
- Convexité :
 - définition à l'aide de l'inégalité de convexité $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ si $t \in [0, 1]$, position d'une courbe de fonction convexe par rapport à ses sécantes
 - **inégalité de Jensen**
 - caractérisation de la convexité par croissance des pentes : f est convexe sur I si et seulement si tous les taux d'accroissement $\tau_{a,f}$ sont croissants sur $I \setminus \{a\}$
 - caractérisation de la convexité par la croissance de f' pour une fonction dérivable, position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à ses tangentes

Prévisions pour la semaine prochaine : polynômes.