Programme de colle n$^{\text{o}}$ 17

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 20/02 au 24/02 2023

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 12 : Continuité.

- Limites de fonctions :
  - définition des différents types de limites (finies, infinies, quand x tend vers $\pm\infty$, quand x tend vers a)
  - composition de limites
  - caractérisation séquentielle de la limite (utilisée pour prouver que des fonctions du type $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admettent pas de limite en 0)
  - limites à gauche et à droite
  - existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones
- Définition de la continuité en un point et sur un intervalle, stabilité par les différentes opérations usuelles, continuité à droite et à gauche, prolongement par continuité d'une fonction admettant une limite finie en un point, fonctions Lipschitziennes.
- **Théorème des valeurs intermédiaires** et conséquences (théorème de la bijection, **théorème du maximum** (au moins le schéma de la preuve et notamment l'utilisation de Bolzano-Weierstraß), toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone).
- Méthode de dichotomie pour la détermination d'une valeur approchée d'une solution d'équation de la forme $f(x) = 0$ quand f est continue.
- Exemples d'étude de suites implicites. Aucun théorème spécifique à ce sujet, mais pour une suite définie par une condition du type $f_n(u_n) = 0$, on doit savoir :
  - majorer ou minorer la suite par un réel en calculant l'image de ce réel par f_n
  - étudier la monotonie de la suite en passant par le signe de $f_n(u_{n+1})$
  - passer l'équation de définition de la suite à la limite pour obtenir la limite de la suite implicite, en exploitant éventuellement un raisonnement par l'absurde

Chapitre 13 : Dérivation

- Dérivation, vocabulaire et formulaire :

- — taux d'accroissement $\tau_{a,f}$ d'une fonction f en a, interprétation graphique comme pente de la droite reliant les points de la courbe d'abscisses a et $a+h$, définition de $f'(a)$ comme limite du taux d'accroissement, fonction dérivable en a et dérivable sur un intervalle I
  — dérivée à gauche ou à droite en a (notées $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$), demi-tangentes à la courbe quand les deux valeurs sont distinctes, existence de tangentes verticales en cas de limite infinie du taux d'accroissement
  — équation de la tangente en a à la courbe représentative de f, devéloppement limité à l'ordre 1 de f en a (écrit sous la forme $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$)
  — démonstration des diverses formules de dérivation (**somme**, **produit**, **inverse**, **quotient**, composée, réciproque)
  — dérivées successives d'une fonction, notation $f^{(n)}$, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{D}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle, formule de Leibniz pour la dérivée n-ème d'un produit
- Théorèmes faisant intervenir la dérivation :
  — si f est dérivable sur $[a,b]$ et admet un extremum en $x \in]a,b[$, alors $f'(x) = 0$ (**démonstration** à connaître)
  — théorème de Rolle
  — théorème des accroissements finis (sa **démonstration** à l'aide du théorème de Rolle est à connaître)
  — application du TAF à l'étude des variations
  — théorème de prolongement de la dérivée (si f est dérivale sur $]a,b]$, continue en a et f' admet une limite l en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$)
  — inégalité des accroissements finis (deux versions, une avec une hypothèse du type $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ sur un intervalle I, une autre où on a une hypothèse de majoration de $|f'|$)
- PAS de suites récurrentes cette semaine, ce sera pour la prochaine fois.

Prévisions pour la semaine prochaine : dérivation (avec suites récurrentes), début des polynômes.