

Programme de colle n° 15

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 23/01 au 27/01 2023

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 10 : Arithmétique.

- Divisibilité dans \mathbb{Z} , **théorème de division euclidienne**, nombres premiers (existence d'une infinité de nombres premiers, crible d'Eratosthène), congruences dans \mathbb{Z} .
- Pgcd, ppcm (y compris d'une famille d'entiers), notation $n \wedge p$ et $n \vee p$, algorithmes d'Euclide, théorèmes de Bézout et de Gauss, entiers premiers entre eux, premiers entre eux dans leur ensemble.
- Valuations p -adiques, additivité des valuations p -adiques, théorème de décomposition en facteurs premiers, calcul du pgcd et du ppcm à l'aide de la décomposition en facteurs premiers et formule $(n \wedge p) \times (n \vee p) = n \times p$, petit théorème de Fermat.

Chapitre 11 : Calcul matriciel.

- Calcul matriciel élémentaire :
 - définition des matrices et notation des ensembles de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vocabulaire de base (taille d'une matrice, matrices carrées, diagonales, triangulaires, matrices nulles, matrices identité I_n)
 - somme de matrices, produit d'une matrice par une constante, combinaisons linéaires de matrices, produit matriciel, propriétés (à savoir démontrer : **le produit d'une matrice A par une matrice identité de taille compatible est égal à A**)
 - transposition, matrices symétriques et antisymétriques
 - puissances d'une matrice carrée, exemples de calculs de puissances à l'aide de suites récurrentes (typiquement en partant d'une relation du type $A^2 = aA + bI_3$), matrices nilpotentes, formule du binôme de Newton matricielle et exemples
 - trace d'une matrice carrée, linéarité de la trace, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

Prévisions pour la semaine suivante : calcul matriciel (plus complet), peut-être continuité.