TD n$^{\text{o}}$ 2

MPSI Lycée Camille Jullian

27 septembre 2022

I. Étude d'une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$.

On désigne par L la relation binaire définie sur $\mathbb{N}^2$ par $(a,b)L(c,d)$ si $a < c$ ou ($a = c$ et $b \leqslant d$). Cette relation est connue sous le nom d'ordre lexicographique (pour des raisons qui devraient vous sembler évidentes).

1. Vérifier que L est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$, et que cet ordre est total.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^2$ possède un minimum pour la relation L.
3. Montrer que $\mathbb{N}^2$ ne possède pas de maximum pour la relation L.
4. On appelle chaîne de $\mathbb{N}^2$ toute suite finie $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de $\mathbb{N}^2$ tels que $x_1 L x_2$, $x_2 L x_3$, …, $x_{p-1} L x_p$. L'entier p est appelé longueur de la chaîne, x_1 est la tête de la chaîne et x_p la queue de la chaîne.
   (a) Construire une chaîne de longueur 3 ayant $(1,2)$ pour tête et $(3,4)$ pour queue.
   (b) Soient $x = (a,b)$ et $y = (c,d)$ deux élements de $\mathbb{N}^2$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une chaîne ayant x pour tête et y pour queue.
   (c) Montrer que, $\forall y \in \mathbb{N}^2$, il existe une chaîne ayant $(0,0)$ pour tête et y pour queue.
5. Soit $y = (c,d)$ un élément de $\mathbb{N}^2$.
   (a) Déterminer à quelle condition sur y les longueurs des chaînes admettant $(0,0)$ comme tête et (c,d) comme queue sont majorées par une constante dépendant uniquement de y.
   (b) Dans ce cas, déterminer la longueur maximale d'une telle chaîne. Existe-t-il une unique chaîne de longueur maximale ?
   (c) Calculer le nombre total de chaînes ayant $(0,0)$ pour tête et y pour queue quand ce nombre est fini.
6. On considère l'ensemble de toutes les chaînes admettant $(0,0)$ pour tête et $y = (c,d)$ pour queue, et on définit sur ces chaînes la relation $\mathcal{R}$ par $C\mathcal{R}C'$ (ici, C et C' désignent donc des chaînes) si et seulement si la longueur de C est inférieure ou égale à celle de C'.
   Montrer que la relation $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre sur l'ensemble sur lequel elle est définie.

II. Une deuxième relation sur $\mathbb{N}^2$.

On définit similairement à la première partie une relation G sur $\mathbb{N}^2$ par $(a,b)G(c,d)$ si $a + b < c + d$ ou ($a + b = c + d$ et $b \leqslant d$).

1. Montrer que G est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^2$.
2. Déterminer le minimum de l'ensemble $\mathbb{N}^2$ pour cette relation.
3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^{2*} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a + b > 0\}$ admet aussi un minimum à préciser pour cette relation.
4. On définit des chaînes pour la relation G de la même façon qu'on l'avait fait dans la première partie pour la relation L.
   (a) Montrer que, si xGy, avec $x = (a,b)$ et $y = (c,d)$, les longueurs des chaînes admettant x comme tête et y comme queue sont majorées.
   (b) Montrer qu'il existe une longueur maximale α pour de telles chaînes.
   (c) Exprimer α en fonction de a, b, c et d.
   (d) Déterminer le nombre de chaînes de longueur maximale ayant x pour tête et y pour queue.