TD n$^{\mathrm{o}}$ 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

6 septembre 2022

Exercice 1

Étudier le plus complètement possible les fonctions définies par les expressions suivantes :

1. Commençons par chercher les valeurs d'annulation du dénominateur pour déterminer le domaine de définition de la fonction f. Le trinôme x^2-x-3 a pour discriminant $\Delta = 1+12 = 13$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \simeq 2.3$, et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \simeq -1.3$. On en déduit évidemment que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{x_1, x_2\}$.

   Les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ se calculent de façon classique, en exploitant le « théorème des termes de plus haut degré » ou en faisant une factorisation des termes prépondérants au numérateur et au dénominateur de la fraction : $f(x) = \dfrac{x(1+\frac{3}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2})} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{3}{x}^2}$, forme sous laquelle ne subsiste plus de forme indéterminée puisque le quotient de droite tend vers 1. On en déduit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

   Le calcul des autres limites de f nécessite essentiellement d'étudier son signe, ce qui se fait bien à l'aide d'un tableau de signes :

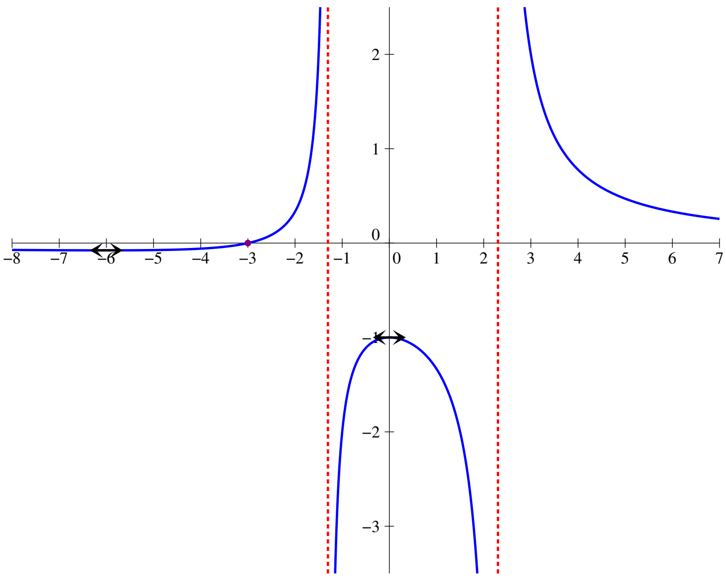
x		-3		x_1		x_2	
$x+3$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
x^2-x-3	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$

   On peut maintenant par exemple calculer $\lim\limits_{x\to x_1^-} x^2-x-3 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to x_1^-} f(x) = +\infty$ (le numérateur ayant une limite finie strictement positive quand x tend vers x_1).

   Il ne reste plus qu'à étudier les variations de la fonction. Elle est dérivable sur chacun de ses intervalles de définition, de dérivée $f'(x) = \dfrac{x^2-x-3-(2x-1)(x+3)}{(x^2-x-3)^2} = \dfrac{-x^2-6x}{(x^2-x-3)^2} = \dfrac{-x(x+6)}{(x^2-x-3)^2}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, qui s'annule en $x=0$ et $x=-6$ et qui sera positif uniquement entre ces deux valeurs. Profitons-en pour calculer $f(0) = \dfrac{3}{-3} = -1$ et $f(-6) = \dfrac{-3}{39} = -\dfrac{1}{13}$ afin de compléter le tableau de variations de la fonction :

x	$-\infty$		-6		-3		x_1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{13}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

On termine enfin notre étude en traçant une allure de la courbe représentative de f, en prenant bien soin d'indiquer les différentes asymptotes, ainsi que les tangentes horizontales aux points d'annulation de la dérivée :



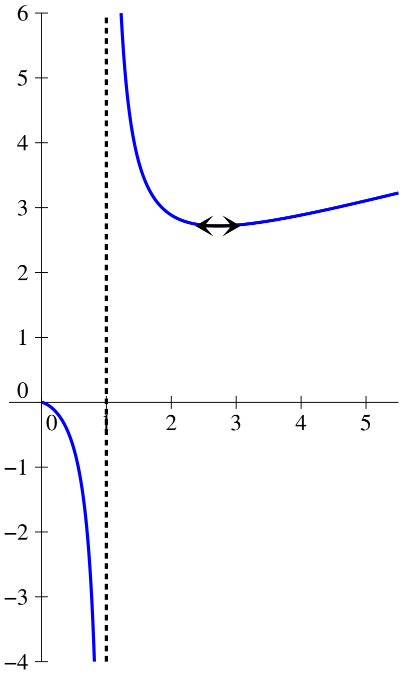
$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-3}$$

2. La fonction g est définie sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$. Elle y est dérivable, de dérivée $f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$, dont le signe est celui de $\ln(x)-1$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $]0,1[$ et sur $]1,e[$, et strictement croissante sur $]e,+\infty[$.

   On a besoin de connaître les résultats de croissance comparée pour affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Pas de forme indéterminée en 0, par contre, où on a directement $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Enfin, les dernières limites ne posent aucun problème : $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$ (le dénominateur est négatif à gauche de 1) et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$. En calculant $g(e) = e$, on complète le tableau de variations suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
g	$\|\|$ 0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

   On conclut bien sûr avec une allure de courbe :

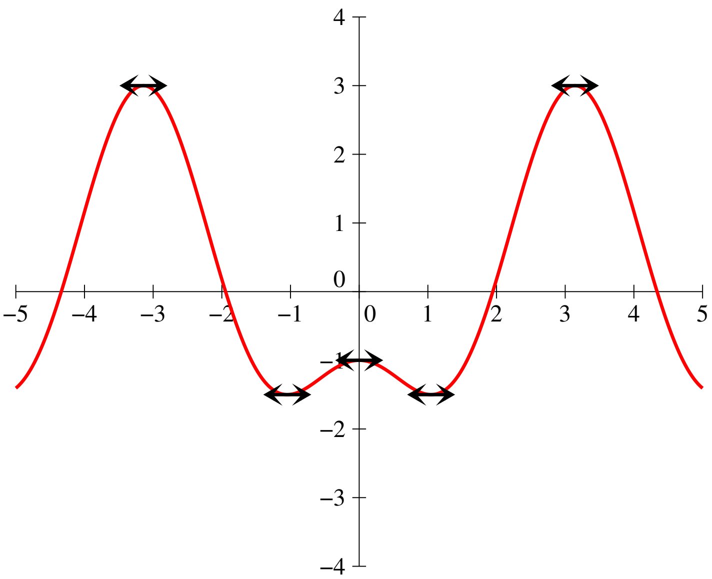


3. La fonction h est bien sûr définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est de plus paire (car la fonction cos est paire) et 2π-périodique (là aussi car cos l'est également). On peut donc restreindre l'étude de la fonction à l'intervalle $[0, \pi]$, et compléter la courbe ensuite par symétrie par rapport à (Oy) puis en exploitant la périodicité.

   La dérivée de notre fonction est donnée par $h'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin(x) = 2(\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)) = 2\sin(x)(1 - 2\cos(x))$ (en exploitant la formule de duplication $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$; si on ne connait pas cette formule on peut quand même s'en sortir mais le calcul est plus long). Sur $[0, \pi]$, le sinus est toujours positif (mais s'annule en 0 et en π), reste à déterminer le signe de $1 - 2\cos(x)$. Cette expression est positive lorsque $\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui, sur l'intervalle $[0\pi]$, se produit sur $\left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$. La dérivée change donc de signe en $\dfrac{\pi}{3}$, qui est un minimum local de la fonction de valeur $h\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{3}{2}$. On calcule également $h(0) = 0$ et $h(\pi) = 1 - (-2) = 3$ pour compléter le tableau de variations de h :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
h	0	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

   En complétant par symétrie et par périodicité, on obtient une courbe ressemblant à ceci :



Exercice 2

1. Les fonctions f_n sont toutes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Comme $f_0(x) = e^{-x^2}$, on calcule, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0'(x) = -2xe^{-x^2}$, qui est simplement du signe de $-x$. La fonction admet donc un maximum en 0 de valeur $f_0(0) = e^0 = 1$, et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$ (aucune difficulté), ce qui permet de dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_0	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On peut même remarquer que la fonction f_0 est paire, voire qu'il s'agit de la célèbre « courbe en cloche » de Gauss si utile dans le domaine des probabilités.

2. Comme $f_1(x) = xe^{-x^2}$, on calcule $f_1'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$. Cette dérivée est du signe de $1 - 2x^2$, et s'annule en particulier lorsque $x^2 = \frac{1}{2}$, soit $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On calcule donc $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$. Les limites données dans l'énoncé nous permettent par ailleurs d'affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$. On peut alors dresser le tableau suivant (en utilisant le fait que f_1 est impaire pour ne pas avoir à calculer les autres valeurs) :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	0

3. Ce n'est pas vraiment plus dur : $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}e^{-x^2} = x^{n-1}(n-2x^2)e^{-x^2}$. La dérivée s'annule toujours en 0 (sauf quand $n = 1$, comme on a vu plus haut) sans changer de signe quand n est impair (puisque dans ce cas x^{x-1} est une puissance paire de x qui est

toujours positive), et pour $x = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}$. On calcule $f\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} = \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$ (la valeur de l'autre côté sera égale ou opposée selon la parité de n. Les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont toujours nulles (c'est donné par l'énoncé pour $+\infty$, et on peut invoquer la parité des fonctions pour $-\infty$). On obtient alors le tableau suivant si n est impair :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	$-\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	$\searrow$	0

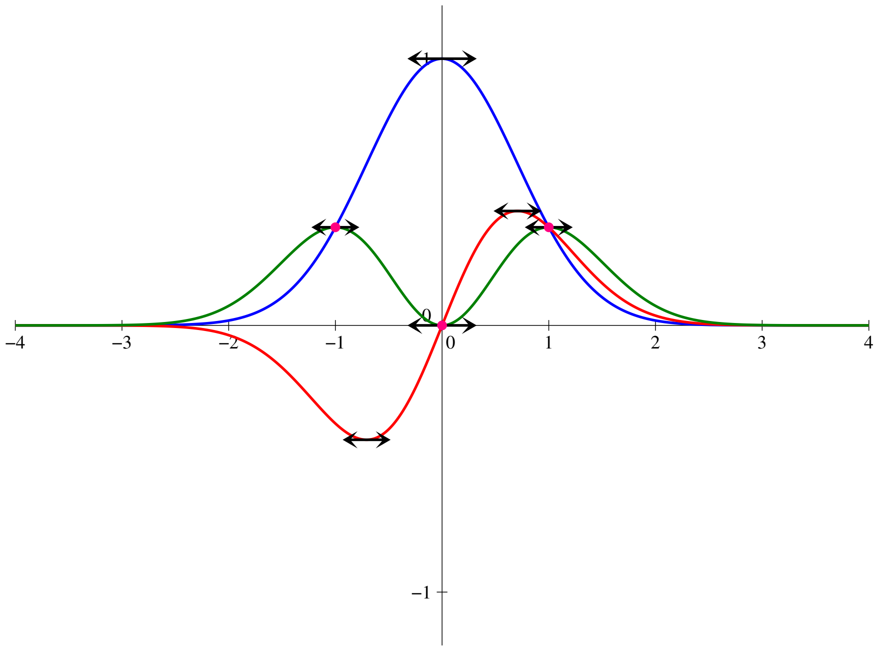
Et si n est pair :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
f_1	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	$\searrow$	0

Dans le cas particulier de $f_2(x) = x^2e^{-x^2}$, la dérivée s'annule en 0 et en ± 1. On calcule $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$, puis on dresse le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_2	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

4. Calculons $f_n(x) - f_{n+1}(x) = x^ne^{-x^2} - x^{n+1}e^{-x^2} = x^n(1-x)e^{-x^2}$. La courbe $\mathcal{C}_n$ est donc au-dessus de $\mathcal{C}_{n+1}$ sur l'intervalle $[0, 1]$, et en-dessous sur $[1, +\infty[$. Toutes les courbes se coupent au point de coordonnées $\left(1, \frac{1}{e}\right)$, ainsi qu'à l'origine du repère, sauf pour le cas particulier de $\mathcal{C}_0$. Sur $\mathbb{R}^-$, $\mathcal{C}_n$ est toujours en-dessous si n est impair, et toujours au-dessus si n est pair, ce qui est évident vu le signe des deux fonctions correspondantes. Faisons de même pour $f_n(x) - f_{n+2}(x) = x^n(1-x^2)e^{-x^2}$. Si n est pair, $\mathcal{C}_n$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{n+2}$ sur $[-1, 1]$, en-dessous le reste du temps. Si n est impair, elle est au-dessus sur $[0, 1]$ et sur $]-\infty, -1]$ et en-dessous le reste du temps. Les courbes « paires » se coupent donc au point de coordonnées $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ et les courbes « impaires » au point de coordonnées $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$.
5. Voici les allures, avec $\mathcal{C}_0$ en bleu, $\mathcal{C}_1$ en rouge, $\mathcal{C}_2$ en vert, et les points d'intersection en rose. Pour le placement des points importants, on doit être capable de calculer $\frac{1}{e} \simeq 0.4$ pour avoir l'ordonnée du point d'intersection des courbes, et celle des maxima de f_2. Le maximum de f_1 est nettement plus pénible, il est atteint pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.7$ et vaut $\frac{1}{\sqrt{2e}} \simeq \frac{1}{\sqrt{5.4}} \simeq \frac{1}{2.5} \simeq 0.4$. Il est en fait très légèrement au-dessus de l'ordonnée $\frac{1}{e}$ (l'étude des positions relatives assure qu'il est nécessairement au-dessus).



Exercice 3

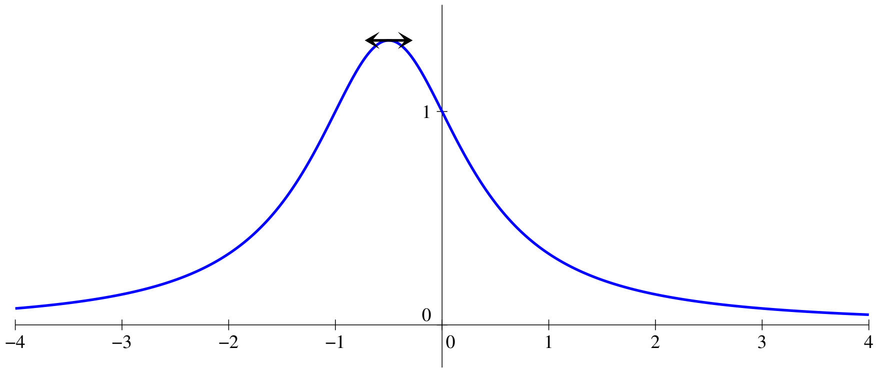
1. Le trinôme $1+x+x^2$ a pour discriminant $\Delta = 1-4 = -3 < 0$, il est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Toutes les fonctions manipulées dans cet exercice sont des fonctions rationnelles dérivable sur tout leur ensemble de définition. On calcule d'abord, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$, puis en dérivant f' comme un produit, $f''(x) = -\dfrac{2}{(x^2+x+1)^2} - (2x+1) \times \dfrac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \dfrac{2(2x+1)^2 - 2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^3}$
$= \dfrac{8x^2+8x+2-2x^2-2x-2}{(x^2+x+1)^3} = \dfrac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}$.
3. La dérivée seconde f'' est du signe de $x(x+1)$ (le dénominateur est toujours du signe de x^2+x+1, donc positif), donc négative uniquement entre -1 et 0. Les seules limites à calculer sont celles en $-\infty$ et en $+\infty$ qui sont toutes les deux nulles, pour f' comme pour f, car on un quotient de polynômes dont le dénominateur est de degré strictement plus grand que le numérateur. Reste à calculer $f'(0) = -1$ et $f'(-1) = 1$ pour compléter le tableau de variations de f' :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	0

La dérivée f' est du signe de $-(2x+1)$ et s'annule en particulier pour $x = -\dfrac{1}{2}$. On a déjà précisé les limites de f, il ne reste plus qu'à calculer l'ordonnée du maximum $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0

4. On se contentera d'indiquer la tangente horizontale au maximum sur la courbe, mais le calcul de f'' permet en fait d'être plus précis : la courbe représentative de f est convexe sur les intervalles $]-\infty, -1]$ et $[0, +\infty[$ et concave sur l'intervalle $[0, 1]$, ce qu'on peut bien sûr essayer de respecter lors du tracé de l'allure de courbe.



5. Par décroissance de la fonction f sur $[0, +\infty[$, si $\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$, alors $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\dfrac{1}{3}\right)$. Comme $f(1) = \dfrac{1}{3}$ et $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1} = \dfrac{9}{13} < 1$, on obtient bien $\dfrac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$, donc l'intervalle est stable.
6. La dérivée f' est strictement croissante et négative sur l'intervalle I, la valeur maximale atteinte par $|g'|$ sur cet intervalle est donc $\left|g'\left(\dfrac{1}{3}\right)\right| = \dfrac{\frac{2}{3} + 1}{(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1)^2} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{169}{81}} = \dfrac{135}{169}$. On peut en déduire que $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leqslant C$, avec $C = \dfrac{135}{169} \in]0, 1[$.
7. La fonction $z : x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynômiale et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Le discriminant de cette dérivée est $\Delta = 4 - 12 < 0$, donc z' est toujours positive et z strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} z(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} z(x) = +\infty$, la fonction z est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $z(x) = 0$ admet une unique solution. Or, $z(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + x + x) = 1 \Leftrightarrow x = f(x)$, ce qui prouve que cette unique solution est également l'unique solution de l'équation $f(x) = x$. En posant $g(x) = f(x) - x$, la fonction g est continue et vérifie $g\left(\dfrac{1}{3}\right) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{1}{3} = \dfrac{9}{13} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{14}{39} > 0$ et $g(1) = f(1) - 1 = \dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{2}{3} < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure donc que la fonction g s'annule (au moins) une fois dans l'intervalle I. Comme on sait déjà que g s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ tout entier, la valeur d'annulation l de la fonction g appartient nécessairement à l'intervalle I.
8. (a) C'est une récurrence très facile : $u_0 \in I$ par définition, et $u_n \in I \Rightarrow f(u_n) \in I$ d'après la question 5. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$, cela prouve l'hérédité, et la propriété « $u_n \in I$ » est donc vérifiée pour tout entier naturel n.
   (b) Puisqu'on sait que $l \in I$ et $u_n \in I$, il suffit d'appliquer l'inégalité donnée dans la question 6 à $x = l$ (qui vérifie bien $f(x) = f(l) = l$) et à $y = u_n$, pour lequel $f(y) = f(u_n) = u_{n+1}$. On trouve immédiatement l'inégalité souhaitée.

(c) C'est une récurrence tout à fait classique exploitant les questions précédentes : puisque $l \in I$, $|u_0 - l| = |1 - l| \leqslant \frac{2}{3}$, ce qui prouve largement l'initialisation au rang 0 (on doit prouver que $|u_0 - l| \leqslant C^0 = 1$). Ensuite, si on suppose $|u_n - l| \leqslant C^n$, on en déduira $|u_{n+1} - l| \leqslant C|u_n - l| \leqslant C \times C^n = C^{n+1}$ en appliquant successivement le résultat de la question précédent et l'hypothèse de récurrence. Ceci achève de prouver l'hérédité.

(d) On sait que $0 \leqslant |u_n - l| \leqslant C^n$, avec $\lim_{n \to +\infty} C^n = 0$ (suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1). D'après le théorème des gendarmes, on aura donc $\lim_{n \to +\infty} |u_n - l| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.

(e) Pour obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près de l, il faut trouver un réel x tel que $|x - u_n| \leqslant 10^{-3}$. Les questions précédentes prouvent que ce sera le cas du réel u_n si $C^n \leqslant 10^{-3}$ (et même probablement avant car on a une simple majoration et non une égalité). Cette dernière condition est vérifiée si $n \ln(C) \leqslant -3\ln(10)$, soit $n \geqslant \frac{-3\ln(10)}{\ln(C)}$ (attention au changement de sens des inégalités, comme $C \in]0, 1[$, $\ln(C) < 0$). Si on avait une calculatrice sous la main, on pourrait calculer la valeur de $n_0 = Ent\left(\frac{-3\ln(10)}{\ln(C)}\right) + 1$ (l'ajout d'une unité assure que le nombre entier obtenu est supérieur à la borne souhaitée), puis la valeur de u_{n_0} qui fournira la valeur approchée demandée.