TD n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

6 septembre 2022

Exercice 1

Étudier le plus complètement possible les fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-x-3}$
2. $g(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$
3. $h(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$

Exercice 2

On considère dans cet exercice la famille de fonctions f_n définies par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On pourra utiliser dans cet exercice le résultat classique de croissance comparée suivant : $\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^{x^2}} = 0$.

1. Étudier complètement la fonction f_0 (variations, limites, pas de courbe pour l'instant).
2. Étudier complètement la fonction f_1 (variations, limites, pas de courbe pour l'instant).
3. Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n (le paramètre n étant un entier naturel), et étudier son signe (on pourra distinguer des cas selon les valeurs prises par n). On dressera en particulier le tableau de variations de la fonction f_2.
4. En notant $\mathcal{C}_n$ les courbes représentatives des fonctions f_n, étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et de $\mathcal{C}_{n+1}$, puis celles de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+2}$. On précisera en particulier les points communs à ces courbes.
5. Tracer dans un **même** repère une allure cohérente des courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Exercice 3

On définit dans cet exercice une fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis sa dérivée seconde f''. On donnera l'expression la plus factorisée possible de $f''(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f' sur son ensemble de définition, puis celui de f (on précisera les limites utiles).
4. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f.

5. Montrer que l'intervalle $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ est stable par la fonction f, c'est-à-dire que $f(I) \subset I$.
6. Montrer qu'il existe une constante $C \in]0, 1[$ telle que, $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant C$. On **admet** que cette inégalité implique la suivante : $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(y) - f(x)| \leqslant C|y - x|$.
7. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une seule solution réelle (sans chercher à la résoudre), et en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet également une seule solution qu'on notera l. Vérifier enfin que $l \in I$.
8. On définit désormais une suite (u_n) de la façon suivante : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ (réutiliser les questions précédentes est vivement conseilllé).
   (b) Montrer que l'inégalité $|u_{n+1} - l| \leqslant C \times |u_n - l|$ est vérifiée pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que $|u_n - l| \leqslant C^n$.
   (d) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
   (e) Donner une méthode précise permettant de calculer une valeur approchée à 10^{-3} près du réel l (aucune application numérique n'est demandée).