Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 7 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

17 mai 2023

1. On a une majoration évidente : $\mathbb{P}(A\cap B)\leq \dfrac{3}{4}$, puisque $A\cap B\subset A$ par exemple. Bien sûr, on ne peut pas améliorer cette majoration puisqu'on aura égalité par exemple si $A=B$. Pour obtenir une minoration, utilisons le fait que $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B)\geq \dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}-1=\dfrac{1}{2}$ puisqu'on a évidemment $\mathbb{P}(A\cup B)\leq 1$. Cette minoration peut-elle être une égalité ? Oui, bien sûr, il suffit d'avoir justement $A\cup B=\Omega$ pour que ce soit le cas, et c'est possible quand A et B ont tous les deux poour probabilité $\dfrac{3}{4}$ (il suffit que leur intersection soit de probabilité $\dfrac{1}{2}$, en fait. Finalement, $\mathbb{P}(A\cap B)\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$.
2. Commençons par calculer la partie entière de la fraction en effectuant la division euclidienne :

$$\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & X^4 & & & & & & & & & & X^2-3X+2 \\ \cline{12-12}
- & (X^4 & - & 3X^3 & + & 2X^2) & & & & & & X^2+3X+7 \\
 & & & 3X^3 & - & 2X^2 & & & & & & \\
 & & - & (3X^3 & - & 9X^2 & + & 6X) & & & & \\
 & & & & & 7X^2 & - & 6X & & & & \\
 & & & & - & (7X^2 & - & 21X & + & 14) & & \\
 & & & & & & & 15X & - & 14 & &
\end{array}$$

   Notre partie entière est donc égale à X^2+3X+7 (comme d'habitude, le reste n'a aucune importance). Par ailleurs, notre fraction a pour pôles simples 1 et 2 (racines évidentes de X^2-3X+2. On aura donc $F=X^2+3X+7+\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X-2}$. On peut par exemple calculer a et b en dérivant le dénominateur de la fraction initiale : $a=\left.\dfrac{X^4}{2X-3}\right|_{X=1}=-1$ et $b=\left.\dfrac{X^4}{2X-3}\right|_{X=2}=16$. Conclusion : $\dfrac{X^4}{X^2-3X+2}=X^2+3X+7-\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{16}{X-2}$.
3. Notons G l'évènement « l'élève choisi est un génie » et de même N et B pour élève normal et boulet. L'énoncé nous informe que $\mathbb{P}(G)=\dfrac{10}{10+6+8}=\dfrac{5}{12}$, $\mathbb{P}(N)=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(B)=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$. De plus, en notant A l'évènement « l'élève a eu 20 en maths au bac », on sait également que $\mathbb{P}_G(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}_N(A)=\dfrac{1}{3}$ et $\mathbb{P}_B(A)=\dfrac{1}{4}$. Ce qu'on cherche à calculer est la valeur de $\mathbb{P}_A(B)$. On va appliquer la formule de Bayes. Commençons par calculer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide de la formule des probabilités totales, les évènements G, N et B formant clairement un système complet : $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}_G(A)\times\mathbb{P}(G)+\mathbb{P}_N(A)\times\mathbb{P}(N)+\mathbb{P}_B(A)\times\mathbb{P}(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{24}+\dfrac{2}{12}=\dfrac{9}{24}=\dfrac{3}{8}$. On peut maintenant écrire que $\mathbb{P}_A(B)=\dfrac{\mathbb{P}_B(A)\times\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$. De même, $\mathbb{P}_A(G)=\dfrac{\mathbb{P}_G(A)\times\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{5}{9}$. Notre élève a donc deux chances neuf d'être un boulet, et cinq chances sur neuf d'être un génie.

4. Commençons par faire le calcul dans $\mathbb{C}(X)$, où on aura $F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-i} + \frac{\overline{c}}{X+i}$ (pas de partie entière ici). En multipliant par $X - i$ avant de poser $X = i$, on trouve $c = \frac{i-1}{i^2(i+i)} = \frac{1-i}{2i} = \frac{-1-i}{2}$. De même, un produit par X^2 puis une évaluation en 0 donne $b = -1$. Enfin, en multipliant par X avant de faire tendre la variable vers $+\infty$, on a $0 = a + c + \overline{c}$, donc $a = 1$. Conclusion : $F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} - \frac{1+i}{2(X-i)} - \frac{1-i}{2(X+i)}$. On regroupe les deux derniers termes : $-\frac{1+i}{2(X-i)} - \frac{1-i}{2(X+i)} = \frac{-(1+i)(X+i)-(1-i)(X-i)}{2(X^2+1)} = \frac{-2X+2}{2(X^2+1)} = \frac{1-X}{X^2+1}$. Dans $\mathbb{R}(X)$, on a donc la décomposition $F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{1-X}{X^2+1}$.

5. (a) Le joueur J_1 gagne s'il gagne les trois premières parties, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{8}$. C'est en fait la même probabilité pour J_2, mais aussi pour J_3 : peu importe le résultat de la première partie, il gagnera s'il gagne les trois parties suivantes (personne ne peut gagner avant lui). C'est encore la même chose pour J_4 il n'y a que deux parties disputées avant qu'il entre en jeu, donc personne ne peut gagner avant lui) ! Ce n'est qu'à partir de J_5 que la probabilité diminue : pour que J_5 gagne, il faut qu'il gagne les parties 4, 5 et 6, mais aussi que personne n'ait gagné à l'issue de la troisième partie, ce qui se produit avec probabilité $\frac{3}{4}$ (en effet, le joueur J_1 ou le joueur J_2 peuvent gagner à l'issue des trois premières parties, avec probabilité $\frac{1}{8}$ chacun). Le joueur J_5 a donc une probabilité de gagner égale à $\frac{3}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$.

   (b) On vient de la calculer, cette probabilité vaut $\frac{3}{4}$. Pour le joueur J_6, il participera si aucun des trois premiers joueurs ne gagne le tournoi. Comme le fait que J_1, J_2 ou J_3 gagne sont des évènements incompatibles, l'un des trois gagne avec probabilité $\frac{3}{8}$ et J_6 peut donc jouer avec probabilité $\frac{5}{8}$.

   (c) Pour que le joueur J_{n+2} joue, il faut qu'on soit dans un des deux cas suivants : soit le joueur J_{n+1} a pu jouer (personne n'avait gagné avant) et il a battu son premier adversaire (peu importe de qui il s'agit) pour aller ensuite affronter J_{n+2}, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{2}p_{n+1}$; soit le joueur J_n a pu jouer et il a gagné ses deux premiers matchs, contre le champion précédent et contre J_{n+1}, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{4}p_n$. Ces deux cas sont évidemment incompatibles, et il n'y en a pas d'autre : une rencontre entre J_{n+2} et J_{n-1} (ou n'importe quel joueur avec un numéro encore inférieur) supposerait que J_{n-1} a déjà gagné trois matchs et que le tournoi est donc terminé. Finalement, $p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n$.

   (d) La suite (p_n) est récurrente linéaire d'ordre deux, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, et admet donc pour racines $x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. On aura donc une formule de la forme $p_n = Ax_1^n + Bx_2^n$. Pas besoin de détailler le calcul de A et B, les deux racines appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$, donc $\lim p_n = 0$. Cela prouve que le tournoi finira par se terminer avec probabilité 1.