

# Interrogation Écrite n° 7

MPSI Lycée Camille Jullian

17 mai 2023

## Énoncé :

1. Deux évènements  $A$  et  $B$  vérifient  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$ . Donner un intervalle le plus précis possible auquel appartient nécessairement  $\mathbb{P}(A \cap B)$ . On justifiera bien entendu la réponse.
2. Effectuer la décomposition en éléments simples de  $F = \frac{X^4}{X^2 - 3X + 2}$ .
3. Une classe de Terminale a réparti ses élèves en trois groupes : 10 génies, 6 élèves normaux et 8 boulets. Chaque génie a une probabilité  $\frac{1}{2}$  d'avoir 20 à son épreuve de maths du bac, chaque élève normal une probabilité  $\frac{1}{3}$  et chaque boulet une probabilité  $\frac{1}{4}$  (chiffres non réalistes). On interroge au hasard un élève de la classe, qui a de fait eu 20 en maths. Quelle est la probabilité que ce soit un boulet ? Que ce soit un génie ?
4. Effectuer la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  et dans  $\mathbb{R}(X)$  de  $\frac{X - 1}{X^2(X^2 + 1)}$ .
5. On organise un tournoi de Pile ou Face entre des joueurs numérotés  $J_1, J_2, \dots, J_n$  (le nombre de joueurs n'est pas limité) de la façon suivante :  $J_1$  joue contre  $J_2$  et celui qui perd (la pièce est équilibrée) est éliminé, alors que celui qui gagne rejoue immédiatement contre  $J_3$ . Le gagnant de ce match affronte  $J_4$  et ainsi de suite. Le tournoi s'arrête dès qu'un joueur a gagné trois parties consécutives, ce joueur étant alors déclaré vainqueur du tournoi.
  - (a) Quelle est la probabilité que le joueur  $J_1$  gagne le tournoi ? Même question pour  $J_2, J_3$  et  $J_4$ .
  - (b) Quelle est la probabilité que  $J_5$  puisse participer au tournoi (donc qu'il joue au moins une partie) ? Même question pour  $J_6$ .
  - (c) On note  $p_n$  la probabilité que le joueur  $n$  participe au tournoi (donc que le tournoi ne soit pas terminé avant la première à laquelle il est censé jouer). Déterminer une relation de récurrence entre  $p_{n+2}, p_{n+1}$  et  $p_n$ .
  - (d) En déduire la limite de  $p_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Que peut-on en déduire pour le tournoi ?