Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 6 corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

5 avril 2023

1. Commençons par écrire $\sqrt{4+x} = 2\sqrt{1+\dfrac{x}{4}}$. On connait bien sûr le DL à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, on peut l'appliquer à $\dfrac{x}{4}$ (qui tend vers 0 quand x tend vers 0) pour obtenir $\sqrt{1+\dfrac{x}{4}} = 1 + \dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{128}x^2 + o(x^2)$. On peut maintenant calculer $e^{\sqrt{4+x}} = e^{2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+o(x^2)} = e^2 \times e^{\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+o(x^2)}$. En posant $u = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{64}x^2 + o(x^2)$ (qui tend vers 0), on peut composer : $e^u = 1+u+\dfrac{1}{2}u^2+o(x^2) = 1+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{64}x^2+\dfrac{1}{32}x^2+o(x^2) = 1+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{64}x^2+o(x^2)$, donc $f(x) = e^2 + \dfrac{e^2}{4}x + \dfrac{e^2}{64}x^2 + o(x^2)$.
2. On commence bien par écrire g sous forme exponentielle : $g(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1-x\sin(x))}$. Commençons par calculer un DL du ln à l'ordre 4 en anticipant la division par x : $1 - x\sin(x) = 1 - x^2 + \dfrac{1}{6}x^4 + o(x^4)$, donc en posant $u = -x^2 + \dfrac{1}{6}x^4 + o(x^4)$ (qui a une limite nulle quand x tend vers 0), on peut écrire $\ln(1+u) = u - \dfrac{1}{2}u^2 + o(x^4) = -x^2 + \dfrac{1}{6}x^4 - \dfrac{1}{2}x^4 + o(x) = -x^2 - \dfrac{1}{3}x^4 + o(x^4)$. On en déduit que $g(x) = e^{-x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}$. On pose $v = -x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ et on compose : $g(x) = 1+v+\dfrac{1}{2}v^2+\dfrac{1}{6}v^3+o(x^3) = 1-x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3) = 1-x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x^3+o(x^3)$.
3. On s'empresse de poser $X = \dfrac{1}{x}$ (qui aura pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$) et de calculer $\ln(1+\ln(1+X)) = \ln\left(1 + X - \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{3}X^3 + o(X^3)\right)$. On va espérer qu'un DL à quatre termes suffise (c'est a priori nécessaire puisque la constante va disparaitre lors du calcul suivant). On peut bien sûr poser $u = X - \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{3}X^3 + o(X^3)$ qui a toujours une limite nulle : $\ln(1+u) = u - \dfrac{1}{2}u^2 + \dfrac{1}{3}u^3 + o(X^3) = X - \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{3}X^2 - \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X^3 + \dfrac{1}{3}X^3 + o(X^3) = X - X^2 + \dfrac{7}{6}X^3 + o(X^3)$ (ne pas oublier le double produit dans le carré). On en déduit que $f(x) = \dfrac{1}{X} \times \dfrac{1}{1 - X + \frac{7}{6}X^2 + o(X^2)}$, et on peut faire un dernier DL de la forme $\dfrac{1}{1+u} = 1-u+u^2+o(X^2) = 1+X-\dfrac{7}{6}X^2+X^2+o(X^2) = 1+X-\dfrac{1}{6}X^2+o(X^2)$. Autrement dit, $g(x) = \dfrac{1}{X} + 1 - \dfrac{1}{6}X + o(X) \underset{x\to+\infty}{=} x + 1 - \dfrac{1}{6x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit successivement :
   - $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   - $f(x) - (x+1) \simeq -\dfrac{1}{6x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x - 1 = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.
   - de plus l'équivalent donné est négatif en $+\infty$, donc la courbe sera localement situé sous son asymptote au voisinage de $+\infty$.

4. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = 2 + \cos(x) > 0$, donc g est continue strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}$. Comme g est impaire, sa réciproque le sera aussi, et elle admettre en 0 un DL de la forme $g^{-1}(x) = ax + bx^3 + o(x^4)$. Comme $g(g^{-1}(x)) = x$, on peut écrire $2g^{-1}(x) + \sin(g^{-1}(x)) = x$, soit $2ax + 2bx^2 + \sin(ax + bx^3 + o(x^4)) = x$. En faisant un DL à l'ordre 3 du sinus, on en déduit que $2ax + 2bx^3 + ax + bx^3 + \dfrac{1}{6}a^3x^3 + o(x^4) = x$. L'unicité de la partie régulière des DL impose alors les conditions $3a = 1$ et $3b + \dfrac{1}{6}a^3 = 0$, donc $a = \dfrac{1}{3}$ puis $b = -\dfrac{1}{18}\left(13\right)^3 = -\dfrac{1}{486}$. On a donc $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{486}x^3 + o(x^3)$.

5. (a) La fonction h est trivialement croissante comme somme de fonction croissantes, et elle est continue, donc bijective de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ (limite évidentes), l'existence et l'unicité de u_n en découlent.

   (b) En notant z la réciproque de la fonction h, on peut dire que $u_n = z(n)$. Or, la fonction z est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (théorème de la bijection), donc (u_n) est elle-même croissante de limite $+\infty$.

   (c) Par définition, $u_n + \ln(u_n) = n$. Or $\ln(u_n) = o(u_n)$ puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc $u_n \sim n$. Pour aller un peu plus loin, il faut être rigoureux : $u_n = n + o(n)$, donc $\ln(u_n) = \ln(n + o(n)) = \ln(n) + \ln(1 + o(1)) = \ln(n) + o(\ln(n))$. ON reporte dans l'équation précédente pour obtenir immédiatement $u_n = n - \ln(n) + o(\ln(n))$.