Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

15 mars 2023

1. (a) F_1 ne peut pas être un sous-espace vectoriel puisqu'il ne contient pas la matrice nulle. Il n'est d'ailleurs pas non plus stable par produit extérieur (par exemple $I_2 \in F_1$ mais $2I_2 \notin F_1$) et pas non plus par somme : $I_2 \in F_1$ et $-I_2 \in F_1$ mais $I_2 - I_2 = 0 \notin F_1$. Bref, il n'a vraiment rien pour lui.

   (b) F_2 est certainement un sous-espace vectoriel, qu'on peut par exemple noter $F_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

   (c) F_3 est aussi un sous-espace vectoriel : la matrice nulle vérifie l'équation, on a stabilité par produit (si $M^\top = 2M$, alors $(\lambda M)^\top = \lambda M^\top = 2\lambda M$) et par somme (la somme des transposées étant égale à la transposée de la somme, on additionne simplement les deux équations).

   (d) $F_4 =$ n'est pas un sous-espace vectoriel : il contient certes la matrice nulle et est stable par produit par une constante, mais pas par somme : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in F_4$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in F_4$ mais la somme de ces deux matrices n'a aucun coefficient nul.

2. (a) L'ordre étant important et les répétitions possibles, on utilise des listes, il y a $5^5 = 3\ 125$ tirages possibles (en fait c'est exactement comme si on effectuait cinq tirages successifs avec remise dans une seule urne contenant cinq boules numérotées de 1 à 5).

   (b) Il y a trois numéros impairs dans chaque urne, on utilise toujours des listes, mais sur un ensemble qui ne contient plus que trois éléments, ce qui donne $3^5 = 243$ tirages possibles.

   (c) C'est comme si on voulait effectuer les cinq tirages dans une même urne, mais sans remise, pour ne plus pouvoir tirer deux numéros identiques. On utilisera donc cette fois des arrangements, et même des permutations puisque le nombre de boules correspond au nombre de tirages. Il y a donc $5! = 120$ tirages convenables (en fait, on doit simplement choisir l'ordre dans lequel les numéros vont être tirés).

   (d) Il est plus simple ici de passer par le complémentaire. Le nombre de tirages où on n'a tiré aucune fois le 3 vaut $4^5 = 1\ 024$ (même raisonnement qu'à la question *b*). Le nombre de tirages avec au moins un 3 est donc de $5^5 - 4^5 = 3\ 125 - 1\ 024 = 2101$.

   (e) Il faut ici choisir les deux urnes où va tirer le chiffre 4, ce qui peut se faire de $\binom{5}{2}$ façons, puis choisir le chiffre tiré dans chacune des trois autres urnes, en interdisant bien sûr de tirer un autre 4 dans celles-ci, ce qui donne $\binom{5}{2} \times 4^3 = 10 \times 64 = 640$ tirages possibles.

   (f) Il faut par exemple choisir le chiffre qui va être tiré trois fois (cinq possibilités), puis les trois urnes où ce chiffre va être tiré, et enfin le chiffre qui va être tiré dans les deux urnes restantes (quatre possibilités), ce qui fait $5 \times \binom{5}{3} \times 4 = 20 \times 10 = 200$ tirages.

3. (a) On peut bien sûr se contenter « d'écrire des Vect ». Ainsi, F est décrit par l'unique équation $z = x + y$, donc $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$, ce qui prouve que F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, et que la famille $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ en est une base (les

deux vecteurs ne sont pas proportionnels). Il y a un peu plus de travail pour G puisqu'il faut résoudre un petit système. Si on additionne les deux équations définissant G, on obtient $3x - 3z = 0$, donc $z = x$, et en reportant dans l'une des deux équations initiales on en déduit que $y = x$. Finalement, $G = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 1))$, et G est une droite de $\mathbb{R}$, dont le vecteur $(1, 1, 1)$ forme une base.

(b) Vérifions donc que la famille obtenue en regroupant les deux bases de F et de G est elle-même une base de E. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on souhaite l'écrire sous la forme $u = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 1) + \lambda_3(1, 1, 1)$, ce qui donne le système suivant à résoudre : $\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & y \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z \end{array}\right.$. Les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ permettent de résoudre immédiatement le système : $\lambda_2 = z - x$ et $\lambda_1 = z - y$, donc (en reportant dans L_3) $\lambda_3 = x + y - z$. Ce calcul prouve que la famille est génératrice, mais aussi qu'elle est libre puisque la solution est toujours unique (et on aura donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ si on impose $x = y = z = 0$). Il s'agit donc bien d'une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui prouve que $F \oplus G = E$.

(c) La famille $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ convient, c'est ce qu'on vient de prouver !

(d) Même pas besoin de refaire un calcul, il suffit de reprendre celui de la question b avec $x = 2$, $y = 3$ et $z = 4$, ce qui donne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 1$. Autrement dit, $(2, 3, 4) = (1, 0, 1) + 2(0, 1, 1) + (1, 1, 1) = (1, 2, 1)_{\mathcal{B}}$.

4. Le plus rapide est de distinguer des cas suivant notamment la valeur du premier chiffre :
   - si le premier chiffre est un 4, on a une seule possibilité, qui est bien entendu 4 000 000 000.
   - si le premier chiffre est un 3, il faut caser un 1 quelque part sur les neuf chiffres restants, ce qui laisse évidemment 9 possibilités.
   - si le premier chiffre est un 2, on peut caser un autre 2 sur les chiffres restants (9 possibilités) ou deux 1 sur les neuf chiffres restants, ce qui fait $\binom{9}{2} = 36$ possibilités supplémentaires, donc 45 nombres commençant par un 2.
   - si le premier chiffre est un 1, on peut caser un 3 (9 possibilités), ou bien un 2 et un 1 (on a $9 \times 8 = 72$ possibilités ici, on choisit d'abord la place du 2 puis celle du 1), ou encore trois 1, ce qui fait $\binom{9}{3} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$ possibilités supplémentaires. Au total, on a donc 165 cas avec un premier chiffre égal à 1.

   Il ne reste plus qu'à additionner : $1 + 9 + 45 + 165 = 220$ nombres convenables.