

# Interrogation Écrite n° 5

MPSI Lycée Camille Jullian

15 mars 2023

## Énoncé :

- Préciser (en justifiant) quels sont les sous-espaces vectoriels de  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  parmi les propositions suivantes :
  - $F_1 = \{M \in E \mid M^2 = I_3\}$
  - $F_2 = \{ \text{matrices diagonales de } E \}$
  - $F_3 = \{M \in E \mid M^\top = 2M\}$
  - $F_4 = \{M \in E \mid \text{au moins un coefficient de } M \text{ est nul} \}$
- Cinq urnes distinctes contiennent chacune cinq boules numérotées de 1 à 5. On tire une boule dans chacune de ces urnes (l'ordre des urnes est donc considéré comme important). On effectuera les applications numériques si elles ne sont pas trop pénibles à faire à la main.
  - Combien de tirages différents peut-on effectuer au total ?
  - Combien de tirages pour lesquels on a tiré uniquement des numéros impairs ?
  - Combien de tirages pour lesquels on a tiré exactement une fois chaque numéro entre 1 et 5 ?
  - Combien de tirages pour lesquels on a tiré au moins une fois un 3 ?
  - Combien de tirages pour lesquels on a tiré exactement deux fois le chiffre 4 ?
  - Combien de tirages pour lesquels un même chiffre (non précisé) a été tiré exactement trois fois, et un autre chiffre deux fois (par exemple on a tiré 2, 5, 5, 2, 2) ?
- Dans  $E = \mathbb{R}^3$ , on s'intéresse aux sous-ensembles  $F = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$  et  $G = \{(x, y, z) \mid x + y - 2z = 2x - y - z = 0\}$ .
  - Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , et donner une base pour chacun des deux.
  - Les sous-espaces  $F$  et  $G$  sont-ils supplémentaires dans  $E$  ? On justifiera bien sûr la réponse donnée (interdiction d'utiliser les résultats sur la dimension vus hier en cours).
  - Donner une base de  $\mathbb{R}^3$  constituée de trois vecteurs appartenant tous à  $F$  ou à  $G$ .
  - Calculer les coordonnées du vecteur  $u = (2, 3, 4)$  dans la base donnée à la question précédente.
- Combien y-a-t-il de nombres à 10 chiffres dont la somme des chiffres est exactement égale à 4 (le premier chiffre d'un nombre à 10 chiffres n'a pas le droit d'être égal à 0) ?