Interrogation Écrite n° 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

19 janvier 2023

Énoncé :

1. Normalement aucun problème pour la première : on écrit $u_n = \ln\left(\frac{n^2-2n}{n^2+1}\right)$, et comme $\lim \frac{n^2-n}{n^2+1} = 1$ (quotient de polynômes, on garde les termes de plus haut degré), on conclut que $\lim u_n = 0$.

   Pour la deuxième, il vaut mieux faire une factorisation soignée : $v_n = \frac{\ln(e^n(1+ne^{-n})}{n} = 1 + \frac{\ln(1+ne^{-n}))}{n}$. Par croissance comparée, $\lim 1 + ne^{-n} = 1$, donc le quotient de droite a une limite nulle, et $\lim v_n = 1$.
2. Il s'agit bien entendu d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équations caractéristique $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$. Même si on ne repère pas l'identité remarquable, on se rend compte que le discriminant est nul et donc qu'il y a une racine double $r_0 = \frac{1}{2}$. Il existe donc deux constantes réelles A et B telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{An+B}{2^n}$. Les valeurs initiales imposent $u_0 = 2 = B$ et $u_1 = -1 = \frac{A+B}{2}$, donc $A = -4$, puis enfin $u_n = \frac{2-4n}{2^n} = \frac{1-2n}{2^{n-1}}$.
3. Le terme général de u_n est une somme de $2n+1$ éléments, dont chacun est compris entre $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$ (les termes sont de plus en plus petits à l'intérieur de la somme. On peut donc effectuer l'encadrement $\frac{2n+1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{n}$. Une application immédiate du théorème des gendarmes permet alors de conclure : $\lim u_n = 2$.
4. Calculons donc $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n - u_n^3}{1+u_n^2} = \frac{u_n(u_n - 1 - u_n^2)}{1+u_n^2}$. Une récurrence triviale permet de prouver que $u_n \geq 0$ (en fait la récurrence n'est même pas nécessaire puisque u_{n+1} est par définition quotient de deux réels positifs), et le dénominateur est également positif. Reste à déterminer le signe de $u_n - 1 - u_n^2$. Or, en posant $f(x) = x - 1 - x^2$, on est en présence d'un trinôme du second degré de discriminant négatif, qui est donc toujours strictement négatif. Autrement dit, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, et la suite (u_n) est donc décroissante. Étant minorée par 0, elle converge nécessairement vers une limite $l \in \mathbb{R}$. On peut alors passer à la limite dans la relation de récurrence pour obtenir l'équation $l = \frac{l^2}{1+l^2}$, donc $l + l^3 - l^2 = 0$. Comme $1 + l^2 - l$ ne s'annule jamais (c'est le même trinôme que tout à l'heure), on a nécessairement $l = 0$. La suite (u_n) a donc une limite nulle.
5. (a) On calcul a priori facilement $u_1 = \frac{11}{2}$, $v_1 = \frac{9}{2}$ et $w_1 = 2$, puis $u_2 = \frac{13}{4}$, $v_2 = \frac{15}{4}$ et $w_2 = 5$.

   (b) On constate que $a_{n+1} = \frac{v_n + w_n - u_n - w_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2} = -\frac{1}{2}a_n$. La suite (a_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $a_0 = u_0 - v_0 = -2$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n =$

$-2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

(c) C'est encore plus rapide : $b_{n+1} = \frac{v_n + w_n + u_n + w_n + u_n + v_n}{2} = u_n + v_n + w_n = b_n$, donc la suite est constante égale à $b_0 = u_0 + v_0 + w_0 = 12$.

(d) Introduisons une troisième suite c_n définie par $c_n = v_n - w_n$, et constatons que $c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n$ (même calcul que pour a_n), donc (c_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $c_0 = -5$, d'où $c_n = -5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. On constate ensuite par exemple que $b_n - a_n + c_n = u_n + v_n + w_n - u_n + v_n + v_n - w_n = 3v_n$, donc $v_n = \frac{1}{3}(b_n - a_n + c_n) = 4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. On peut en déduire rapidement que $u_n = a_n + v_n = 4 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, et $w_n = v_n - c_n = 4 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.