

Interrogation Écrite n° 4

MPSI Lycée Camille Jullian

19 janvier 2023

Énoncé :

1. Calculer la limite des suites définies par $u_n = \ln(n^2 - 2n) - \ln(n^2 + 1)$ et $v_n = \frac{\ln(n + e^n)}{n}$.
2. On considère la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$. Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n .
3. On pose $u_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Déterminer la limite de la suite (u_n) en exploitant le théorème des gendarmes.
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1 + u_n^2}$. Déterminer la monotonie de (u_n) , puis prouver sa convergence et calculer sa limite.
5. On définit trois suites de la façon suivante : $u_0 = 1$, $v_0 = 3$ et $w_0 = 8$, puis, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{v_n + w_n}{2}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2}$ et $w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.
 - (a) Donner la valeur de u_1 , u_2 , v_1 , v_2 , w_1 et w_2 .
 - (b) En posant $a_n = u_n - v_n$, que peut-on dire de la suite (a_n) ? En déduire une expression explicite de a_n .
 - (c) En posant maintenant $b_n = u_n + v_n + w_n$, exprimer b_n en fonction de n (en justifiant votre réponse).
 - (d) Calculer enfin explicitement u_n , v_n et w_n ainsi que leurs limites éventuelles (on pourra introduire une dernière suite auxiliaire si besoin).