Interrogation Écrite n° 3

MPSI Lycée Camille Jullian

23 novembre 2022

1. On reconnait (au signe près) une forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ qui permet de déterminer une primitive directe : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = [-2\sqrt{\cos(x)}]_0^{\frac{\pi}{3}} = -2\times\frac{1}{\sqrt{2}} + 2 = 2-\sqrt{2}$.
2. Il s'agit d'une équation linéaire du premier ordre, qu'on peut normaliser sur l'intervalle proposer pour obtenir l'équation équivalente $y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et y admet pour primitive $x \mapsto \frac{1}{x}$, donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{-\frac{1}{x}}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation complète sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{-\frac{1}{x}}$ (variation de la constante), ce qui implique $y_p'(x) = K'(x)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}K(x)e^{-\frac{1}{x}}$. La fonction y_p est solution de notre équation si $K'(x)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}K(x)e^{-\frac{1}{x}} - \frac{K(x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$, donc si $K'(x) = \frac{1}{x^2}$. On choisit naturellement $K(x) = -\frac{1}{x}$, ou encore $y_p(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$. Il ne reste plus qu'à conclure : les solutions de l'équation initiale sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ke^{-\frac{1}{x}} - \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
3. On va procéder à une IPP en posant $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = e^{2x+1}$ et $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$, qu'on présentera sous forme de calcul d'intégrale sans borne : $\int xe^{2x+1}\,dx = \frac{x}{2}e^{2x+1} - \int \frac{1}{2}e^{2x+1}\,dx = \frac{x}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{4}e^{2x+1} = \frac{2x-1}{4}e^{2x+1}$.
4. Il s'agit d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants, dont l'équation caractéristique $r^2 - 2r - 3 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$ et pour racines $r_1 = \frac{2+4}{2} = 3$ et $r_2 = \frac{2-4}{2} = -1$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-x}$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Le second membre étant un polynôme de degré 1, on va chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax+b$, on aura donc $y_p'(x) = a$ et $y_p''(x) = 0$, donc y_p est solution si $-2a - 3ax - 3b = x + 2$. Une identification triviale donne $a = -\frac{1}{3}$ puis $b = -\frac{4}{9}$, soit $y_p(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$, et les solutions de l'équation sont donc toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-x} - \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
5. On va bien sûr commencer par procéder à une décomposition en éléments simples pour obtenir trois réels a, b et c tels que $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$. Une multiplication par $x+1$ suivie d'un choix de $x = -1$ donne directement $\frac{1}{(-1+2)(-1+3)} = a$, donc $a = \frac{1}{2}$. De même, en multipliant par $x = 2$ puis en posant $x = -2$, on aura

$b = \dfrac{1}{(-2+1)(-2+3)} = -1$ et enfin, en multipliant par $x = 3$ avant de poser $x = -3$, on obetient $c = \dfrac{1}{(-3+1)(-3+2)} = \dfrac{1}{2}$. Il ne reste plus qu'à calculer notre intégrale : $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2(x+3)}\,dx$ $= \left[\dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \ln(x+2) + \dfrac{1}{2}\ln(x+3)\right]_0^2 = \dfrac{1}{2}\ln(3) - \ln(4) + \dfrac{1}{2}\ln(5) + \ln(2) - \dfrac{1}{2}\ln(3) = \dfrac{1}{2}\ln(5) - \ln(2)$.

6. Il s'agit d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants, dont l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = 16 + 12 = 4$ et pour racines $r_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $r_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ae^{3x} + Be^x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Puisque 1 est racine de l'équation caractéristique, on est obligés de chercher une solution particulière de l'équation sous la forme $y_p(x) = (ax^3 + bx^2 + cx)e^x$, ce qui donne $y_p'(x) = (3ax^2 + 2bx + c + ax^3 + bx^2 + cx)e^x = (ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + c)e^x$, puis $y_p''(x) = (3ax^2 + (6a+2b)x + 2b + c + ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + c)e^x = (ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b+c)x + 2b + 2c)e^x$. En simplifiant toutes les exponentielles en facteur dans les deux membres, y_p est donc solution si $ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b+c)x + 2b + 2c - 4ax^3 - (12a+4b)x^2 - (8b+4c)x - 4c + 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx = x^2 - 2$, soit $-6ax^2 + (6a-4b)x + 2b - 2c = x^2 - 2$. Une petite identification donne alors $a = -\dfrac{1}{6}$, puis $6a - 4b = 0$ donc $b = \dfrac{3}{2}a = -\dfrac{1}{4}$, et enfint $2b - 2c = -2$ donc $c = b + 1 = \dfrac{3}{4}$. Finalement, $y_p(x) = \left(-\dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{4}x\right)e^x$, et les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto \left(-\dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{4}x + B\right)e^x + Ae^{3x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.