Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

20 octobre 2022

1. On constate que $\dfrac{89\pi}{6} = 14\pi + \dfrac{5\pi}{6} \equiv \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$, donc $\cos\left(\dfrac{89\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{89\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.
2. L'équation est équivalente à $\cos(2x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} + x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right)$. On a donc deux possibilités : soit $2x \equiv \dfrac{\pi}{6} + x[2\pi]$ et donc $x \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$, soit $2x \equiv -\dfrac{\pi}{6} - x[2\pi]$, donc $x \equiv -\dfrac{\pi}{18}\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$.
3. On pose simplement $X = \cos(2x)$ pour se ramener à l'équation du second degré $2X^2 - 2X + 1 = 0$, qui a pour racine évidente $X_1 = 1$ et pour deuxième racine $X_2 = \dfrac{1}{2}$. On a donc soit $\cos(2x) = 1$, qui implique $2x \equiv 0[2\pi]$ et donc $x \equiv 0[\pi]$, soit $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$, donc $2x \equiv \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et $x \equiv \pm\dfrac{\pi}{6}[\pi]$.
4. Commençons par essayer de simplifier $\sin(\arctan(x))$: on sait que $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) = 1 - \dfrac{1}{1+\tan^2(a)} = \dfrac{\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$, donc $\sin^2(\arctan(x)) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Attention avant de mettre des racines carrées sans réfléchir, le signe va dépendre de celui de x. C'est toutefois une bonne chose, puisqu'on peut donc toujours garder un simple x au numérateur (qui est lui aussi du signe de x) : $\sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ puis on utilise une formule de triplication : $\sin(3\arctan(x)) = 3\sin(\arctan(x)) - 4\sin^3(\arctan(x)) = \dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{4x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{3x - x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3x(1-x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
5. La fonction est sans difficulté définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. En notant $u(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, on calcule $u'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, puis $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{(1+x^2)^2}} = -\dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2} = -\dfrac{2x}{x^4+2x^2+2}$.
6. (a) Attention à bien numéroter les termes : les entiers pairs inférieurs ou égaux à $2n$ peuvent s'écrire sous la forme $2k$ avec k variant entre 1 et n, et les entiers impairs peuvent s'écrire $2k-1$ avec k variant entre 1 et n (si on choisit de les écrire sous la forme $2k+1$, il faut que k varie entre 0 et $n-1$). Dans le premier cas, $(-1)^k = 1$, dans le deuxième $(-1)^k = -1$, ce qui permet d'écrire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k = \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

   (b) Au rang $n = 0$, la somme de gauche est vide et la formule de droite donne $\dfrac{(2\times 0+1)-1}{4} = 0$, donc la formule est vérifiée. Supposons-là vraie au rang n, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k = \dfrac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1) = \dfrac{(-1)^{n+1}(-2n-1+4n+4)-1}{4} = \dfrac{(-1)^{n+1}(2n+3)-1}{4}$, ce qui prouve exactement la formule au rang $n+1$. Elle est donc vraie pour tout entier naturel, et en particulier $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k = \frac{4n+1-1}{4} = n$, ce qui est conforme au premier calcul effectué.