Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

29 septembre 2022

1. On a une égalité de valeurs absolues, on résout donc deux équations. Soit on a $2x^2 - x + 3 = x^2 + x + 2$, donc $x^2 - 2x + 1 = 0$. On reconnait une identité remarquable : $(x-1)^2 = 0$, qui donne comme première solution $x = 1$. Autre possibilité : $2x^2 - x + 3 = -x^2 - x - 2$, donc $3x^2 + 5 = 0$, qui ne peut pas avoir de solution réelle. Finalement, $\mathcal{S} = \{1\}$.

2. On s'empresse de poser $X = \ln(x)$ pour transformer notre inéquation en $2X + \dfrac{1}{X} \leq 3$, puis on fait tout passer à gauche et on met au même dénominateur : $\dfrac{2X^2 - 3X + 1}{X} \leq 0$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et pour racines $X_1 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $X_2 = \dfrac{3+1}{4} = 1$. On peut alors dresser le tableau de signes suivant :

X		0		$\frac{1}{2}$		1	
$2X^2 - 3X + 1$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
X	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{2X^2-3X+1}{X}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$

Notre inéquation est donc vérifiée si $X \in]-\infty, 0[\cup \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, soit après passage à l'exponentielle $\mathcal{S} =]0, 1[\cup [\sqrt{e}, e]$.

3. Il faut bien sûr trouver une racine évidente, ici $x = -1$ fonctionne : $-3 - 8 + 5 + 6 = -11 + 11 = 0$. On peut donc factoriser le membre de gauche de l'équation sous la forme $3x^3 - 8x^2 - 5x + 6 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$. Par identification, on obtient successivement $a = 3$, puis $a + b = -8$ donc $b = -11$, et enfin $b + c = -5$ donc $c = 6$, ce qui est cohérent avec la dernière condition. Reste à calculer les racines du trinôme $3x^2 - 11x + 6$, qui a pour discriminant $\Delta = 121 - 72 = 49$ et admet donc pour racines $x_1 = \dfrac{11-7}{6} = \dfrac{2}{3}$ et $x_2 = \dfrac{11+7}{6} = 3$. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{-1, \dfrac{2}{3}, 3\right\}$.

4. L'inéquation ne peut avoir de sens que si $x \geq 0$. Inutile de séparer deux cas ensuite, tout est positif, on peut donc élever au carré, et le carré d'une valeur absolue est toujours égal au carré de l'expression sans valeur absolue. Autrement dit, on doit résoudre $(2x-3)^2 > x$, soit $4x^2 - 12x + 9 > x$, ou encore $4x^2 - 13x + 9 > 0$. On peut se rendre compte que $x = 1$ est racine évidente, et obtenir la deuxième racine en exploitant le produit de racines égal à $\dfrac{9}{4}$. Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines, donc $\mathcal{S} = [0, 1[\cup \left]\dfrac{9}{4}, +\infty\right[$.

5. Il faut ici séparer la résolution en trois selon les valeurs prises par x (je vous épargne le « tableau de signes » car il est vraiment évident ici) :

   - si $x > 0$, on doit avoir $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} = 1$, donc $x + 1 + x = x(x+1)$, soit $x^2 - x - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ et admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, qu'on ne peut pas conserver car $x_1 < 0$, et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, qu'on conserve.

- si $-1 < x < 0$, on résout cette fois-ci $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} = 1$, donc $-x-1+x = x^2+x$ ou encore $x^2+x+1=0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1-4 = -3$ et n'admet donc pas de solution réelle.
- enfin, si $x < -1$, on aura cette fois $-\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = 1$, donc $x^2+x = -x-1-x$, ou encore $x^2+3x+1=0$. Cette dernière équation a pour discriminant $\Delta = 9-4 = 5$, et pour racines $x_3 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{5}$, qu'on va conserver, et $x_4 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, qu'on élimine car supérieure à -1.

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

6. Commençons par préciser un domaine de définition pour l'inéquation : x^2-5x+4 a pour discriminant $\Delta = 25-16 = 9$ et pour racines $x_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$. L'inéquation n'a donc de sens que sur $]-\infty,1] \cup [4,+\infty[$. En la mettant sous la forme $\sqrt{x^2-5x+4} < 2-x$, on constate immédiatement qu'elle ne peut jamais être vérifiée sur l'intervalle $[4,+\infty[$, où $2-x < 0$. Sur $]-\infty,1]$, on peut tranquillement élever au carré pour obtenir l'inéquation équivalente $x^2-5x+4 \leq 4-4x+x^2$, donc $-x \leq 0$, qui ne devrait pas être trop difficile à résoudre. On a donc simplement $\mathcal{S} =]0,1]$.