Devoir Surveillé n^{o} 9 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

27 avril 2023

Exercice 1

1. On calcule bien sûr directement $I_0 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx = [\ln(x+1)]_1^2 = \ln(3) - \ln(2)$, et $J_0 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Pour le calcul de I_1, il va falloir décomposer la fonction à intégrer sous la forme $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$, ce qu'on peut faire très rapidement en exploitant une astuce belge (ou un peu moins rapidement via les méthodes habituelles) : $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{x+1-x}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$, donc $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx = [\ln(x) - \ln(x+1)]_1^2 = \ln(2) - \ln(3) - \ln(1) + \ln(2) = 2\ln(2) - \ln(3)$.
2. Si $x \in [1,2]$, on aura, pour tout entier naturel n, $0 < x^n \leqslant x^{n+1}$, donc $\dfrac{1}{x^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{x^n}$. En multipliant par des quantités positives, on en déduit les inégalités $\dfrac{1}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant \dfrac{1}{x^n(x+1)}$ et $\dfrac{1}{x^{n+1}(x+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{x^n(x+1)^2}$, valables sur tout l'intervalle $[1,2]$, et qu'on peut donc intégrer entre 1 et 2 pour obtenir $I_{n+1} \leqslant I_n$ et $J_{n+1} \leqslant J_n$. Les deux suites sont donc décroissantes.
3. L'inégalité $0 \leqslant I_n$ est une conséquence immédiate de la positivité de l'intégrale. De plus, sur l'intervalle $[1,2]$, $x+1 \geqslant 2$ donc $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$. On peut alors majorer I_n par $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x^n}\,dx = \left[-\frac{1}{2(n-1)x^{n-1}}\right]_1^2 = -\frac{1}{2^n(n-1)} + \frac{1}{2(n-1)} \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$. On a bien prouvé l'encadrement souhaité, et une application directe du théorème des gendarmes prouve alors la convergence de (I_n) vers 0.
4. On a bien sûr $J_n \geqslant 0$, et en exploitant la majoration $\dfrac{1}{(x+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$, un calcul identique à celui de la question précédente montre que $J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}$ (calcul valable pour $n \geqslant 2$). La conclusion est la même : (J_n) converge et $\lim J_n = 0$.
5. Un calcul idiot pour commencer : $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\,dx = \int_1^2 \frac{x+1}{x^{n+1}(x+1)}\,dx$ $= \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\,dx = \left[-\frac{1}{nx^n}\right]_1^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n2^n}$. Or, la suite (I_n) étant décroissante, on peut écrire l'encadrement $2I_{n+1} \leqslant I_n + I_{n+1} \leqslant 2I_n$, dont on déduit (en décalant les indices de l'inégalité de gauche) $I_n + I_{n+1} \leqslant 2I_n \leqslant I_n + I_{n-1}$, soit $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n2^n} \leqslant 2I_n \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{(n-1)2^{n-1}}$. En multipliant tout par n, on a donc $1 - \dfrac{n}{2^n} \leqslant 2nI_n \leqslant \dfrac{n}{n-1} - \dfrac{n}{(n-1)2^{n-1}}$. Le membre de gauche de cet encadrement tend vers 1 (croissance comparée), et celui de droite aussi, donc le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim 2nI_n = 1$, c'est-à-dire que $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

6. C'est quasiment le même calcul qu'à la question précédente : $J_n+J_{n-1}=\int_1^2 \frac{1+x}{x^n(1+x)^2}\,dx=\int_1^2 \frac{1}{x^n(x+1)}\,dx=I_n$.
7. On va avoir un télescopage en exploitant la question précédente : si on note S_n la somme demandée, $S_n=I_1-I_2+I_3+\cdots+(-1)^{n-1}I_n=J_1+J_0-(J_2+J_1)+(J_3+J_2)-\cdots+(-1)^{n-1}(J_n+J_{n-1})=J_0+(-1)^{n-1}J_n=\frac{1}{6}+(-1)^{n-1}J_n$. Comme on sait que la suite (J_n) a une limite nulle, on en déduit que $\lim S_n=\frac{1}{6}$.

Exercice 2

1. La seule chose à vérifier est la linéarité de f, ce qui est très pénible à écrire : soient $u(x,y,z)$ et $v(x',y',z')$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $f(\lambda u+v)=f(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z')=(2\lambda x+2x'-\lambda y-y'-\lambda z-z',7\lambda x+7x'-2\lambda y-2y'-5\lambda z-5z',-\lambda x-x'-\lambda y-y'+2\lambda z+2z')=\lambda(2x-y-z,7x-2y-5z,-x-y+2z)+(2x'-y'-z',7x'-2y'-5z',-x'-y'+2z')=\lambda f(u)+f(v)$. L'application f est donc bien linéaire, c'est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
2. Commençons par déterminer le noyau en résolvant l'équation $f(u)=0$, c'est-à-dire le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & z & = & 0\\ 7x & - & 2y & - & 5z & = & 0\\ -x & - & y & + & 2z & = & 0\end{array}\right.$. On effectue les opérations $L_2\to L_2-2L_1$ et $L_3\to L_3-L_1$ pour se ramener à $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & z & = & 0\\ 3x & & & - & 3z & = & 0\\ -3x & & & + & 3z & = & 0\end{array}\right.$. Les deux dernières équations sont manifestement équivalentes, on en déduit que $z=x$, puis en reportant dans la première équation que $y=x$. Autrement dit, $\ker(f)=\mathrm{Vect}((1,1,1))$. En particulier, ce noyau est de dimension, donc l'image de f sera de dimension 2 (théorème du rang). Comme $f(1,0,0)=(2,7,-1)$ et $f(0,1,0)=(-1,-2,-1)$ sont deux vecteurs non proportionnels engendrant un sous-espce vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, on aura $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}((2,7,-1),(1,2,1))$ (on a changé les signes du deuxième vecteur, ce qui n'a aucune influence).
3. Soit $u(x,y,z)\in\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)$, alors $x=y=z$ et $u=\lambda(2,7,-1)+\mu(1,2,1)=(2\lambda+\mu,7\lambda+2\mu,\mu-\lambda)$. Puisque ces trois coordonnées doivent être égales, on doit donc avoir $2\lambda+\mu=7\lambda+2\mu=\mu-\lambda$, donc $5\lambda+\mu=0$ et $3\lambda=0$. Ce n'est évidemment possible que si $\lambda=\mu=0$, donc $\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$. Comme de plus $\dim(\ker(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))=3$, les deux sous-espaces sont bien supplémentaires.
4. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on souhaite décomposer u sous la forme $u=a(1,1,1)+b(2,7,-1)+c(1,2,1)$ (dans cette décomposition, on notera $u_F=a(1,1,1)$ le vecteur appartenant à $\ker(f)$ et $u_G=b(2,7,-1)+c(1,2,1)$ celui appartenant à $\mathrm{Im}(f)$). On doit pour cela résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & c & = & x\\ a & + & 7b & + & 2c & = & y\\ a & - & b & + & c & = & z\end{array}\right.$. En soustrayant la première ligne aux deux autres, on obtient $5b+c=y-x$ et $-3b=z-x$. On en déduit directement que $b=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}z$, puis $c=y-x-5b=-\frac{8}{3}x+y+\frac{5}{3}z$, et enfin $a=z+b-c=3x-y-z$. Autrement dit, $u_F=(a,a,a)=(3x-y-z,3x-y-z,3x-y-z)$, et $u_G=(2b+c,7b+2c,-b+c)=(-2x+y+z,-3x+2y+z,-3x+y+2z)$. La symétrie par rapport à $\ker(f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f)$ est alors définie par $s(u)=u_F-u_G$, donc $s(x,y,z)=(5x-2y-2z,6x-3y-2z,6x-2y-3z)$.
5. Pour le premier noyau, on doit résoudre l'équation $f(u)=-u$, donc le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & - & z & = & 0\\ 7x & - & y & - & 5z & = & 0\\ -x & - & y & + & 3z & = & 0\end{array}\right.$ (on a tout fait passer à gauche). On effectue les opérations

$L_2 \to L_2 - L_1$ et $L_3 \to L_3 - L_1$ pour se ramener à $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & - & z & = & 0 \\ 4x & & & - & 4z & = & 0 \\ -4x & & & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux dernières équations sont équivalentes, on obtient $z = x$ puis $y = 2x$ donc $\ker(f + id) = \text{Vect}((1, 2, 1))$. De même pour le second noyau, on doit résoudre $f(u) = 3u$, soit $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & - & z & = & 0 \\ 7x & - & 5y & - & 5z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$. Cette fois-ci on a immédiatement une équation qui disparait. En effectuant $L_2 - 5L_1$, on a $12x = 0$ donc $x = 0$, on en déduit $z = -y$ et $\ker(f + 3\,id) = \text{Vect}((0, 1, -1))$.

6. Il suffit de montrer que la famille $((1, 1, 1), (1, 2, 1), (0, 1, -1))$ est une famille libre (puisqu'elle est constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il s'agira alors automatiquement d'une base). Supposons que $\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 2, 1) + \lambda_3(0, 1, -1) = 0$, alors $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$. La soustraction des deux équations extrêmes donne tout de suite $\lambda_3 = 0$, il reste alors les conditions $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ qui impliquent $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille est donc libre, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Par définition, le vecteur $(1, 1, 1)$ vérifie $f(u) = 0$ (c'est un vecteur du noyau !) donc $f^2(u) = f^3(u) = 0$, l'égalité est triviale pour lui. Mais, par définition également, le vecteur $(1, 2, 1)$ vérifie $f(u) = -u$, donc $f^2(u) = f(-u) = -f(u) = u$, puis $f^3(u) = f(u) = -u$, on en déduit que $f^3(u) - 2f^2(u) - 3f(u) = -u - 2u + 3u = 0$. Enfin, le dernier vecteur $(0, 1, -1)$ vérifie $f(u) = 3u$, donc $f^2(u) = f(3u) = 3f(u) = 9u$ et $f^3(u) = 9f(u) = 27u$, d'où $f^3(u) - 2f^2(u) - 3f(u) = 27u - 18u - 9u = 0$. Puis l'application $f^2 - 2f^2 - 3f$ s'annule pour trois vecteurs formant une base de $\mathbb{R}^3$, il s'agit de l'application nulle, ce qui revient bien à dire que $f^3 = 2f^2 + 3f$.
8. Tiens, si on faisait une récurrence ? Pour $n = 1$, l'égalité est évidente en posant $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$. Elle l'est d'ailleurs tout autant pour $n = 2$ en posant $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$ (ça nous servira pour la question suivante). Supposons désormais l'égalité vérifiée au rang n, alors $f^{n+1} = f^n \circ f = (a_n f^2 + b_n f) \circ f = a_n f^3 + b_n f^2$. En exploitant la relation obtenue à la question précédente, $f^{n+1} = a_n(2f^2 + 3f) + b_n f^2 = (2a_n + b_n)f^2 + 3a_n f$. Il suffit donc de poser $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 3a_n$ pour que la relation soit vraie au rang $n + 1$, ce qui prouve l'hérédité et achève notre récurrence.
9. D'après les calculs de la question précédente, $a_{n+1} = 2a_n + b_n$, donc $a_{n+2} = 2a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_{n+1} + 3a_n$. La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, et son équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$ admet pour racines évidentes -1 et 3 (ce qui a bien sûr un lien avec les deux noyaux calculés en question 5). Il existe donc deux réels A et B tels que $\forall n \geqslant 1$, $a_n = A \times 3^n + B(-1)^n$. Les valeurs initiales de la suite imposent les conditions $a_1 = 0 = 3A - B$, donc $B = 3A$, et $a_2 = 1 = 9A + B$, donc $12A = 1$ et $A = \frac{1}{12}$, dont on déduit $B = \frac{1}{4}$. Finalement, $a_n = \frac{3^n}{12} + \frac{(-1)^n}{4} = \frac{3^{n-1} + (-1)^n}{4}$. Pas besoin de refaire de calculs pour l'autre suite, $b_n = 3a_{n-1} = \frac{3^{n-1} + 3(-1)^{n-1}}{4}$. Conclusion : $f^n = \frac{3^{n-1} + (-1)^n}{4} f^2 + \frac{3^{n-1} + 3(-1)^{n-1}}{4} f$.
10. On calcule brutalement $p^2 = \frac{1}{144}(f^2 + f)^2 = \frac{1}{144}(f^4 + 2f^3 + f^2)$. On sait déjà que $f^3 = 2f^2 + 3f$, on en déduit que $f^4 = 2f^3 + 3f^2 = 7f^2 + 6f$ (ou on applique brutalement la formule explicite de la question précédente), donc $p^2 = \frac{1}{144}(7f^2 + 6f + 4f^2 + 6f + f^2) = \frac{1}{144}(12f^2 + 12f) = \frac{1}{12}(f^2 + f) = p$. Puisque $p^2 = p$, l'application p est bien un projecteur. De même, $q^2 = \frac{1}{16}(f^4 - 6f^3 + 9f^2) = \frac{1}{16}(7f^2 + 6f - 12f^2 - 18f + 9f^2) = \frac{1}{16}(4f^2 - 12f) = \frac{1}{4}(f^2 - 3f) = q$, donc q est également un projecteur.

11. C'est à nouveau un pur calcul formel : $f \circ p = \frac{1}{12}(f^3+f^2) = \frac{1}{12}(2f^2+3f+f^2) = \frac{1}{4}(f^2+f) = 3p$, et $f \circ q = \frac{1}{4}(f^3 - 3f^2) = \frac{1}{4}(-f^2+3f) = -q$.

12. On va bien sûr procéder par récurrence : pour $n = 1$, $3p - q = \frac{1}{4}(f^2+f) - \frac{1}{4}(f^2 - 3f) = \frac{1}{4}f + \frac{3}{4}f = f$, ce qui prouve l'initialisation. Et si on suppose la formule vraie au rang n, les résultats de la question précédente permettent d'écrire que $f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ (3^n + (-1)^n q) = 3^n f \circ p + (-1)^n f \circ q = 3^{n+1}p + (-1)^{n+1}q$, ce qui prouve exactement la formule au rang $n+1$. En remplaçant p et q par leur définition, $f^n = \frac{3^n}{12}(f^2+f) + \frac{(-1)^n}{4}(f^2 - 3f) = \frac{3^{n-1}}{4}f^2 + \frac{3^{n-1}}{4}f + \frac{(-1)^n}{4}f^2 + \frac{3(-1)^{n-1}}{4}f$. On retrouve exactement la même expression qu'à la question 9.

Exercice 3

1. Les exemples les plus simples sont constitués par les fonctions puissances : $x \mapsto x^2$ ou $x \mapsto x^3$ sont bien postives dérivables et convexes sur $[0, +\infty[$ et s'annulent en 0. Pour faire un peu plus original, on peut aussi citer $x \mapsto e^x - 1$ (on doit soustraire 1 pour satisfaire la condition $f(0) = 0$), voire même la fonction sh ou la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x) - 1$. On ne peut par contre pas créer d'exemple simple à partir de la fonction ln (son change le signe pour obtenir une fonction convexe, elle ne sera pas positive).

2. (a) Vérifions déjà que $f(0) = \sqrt{1} - 1 = 0$. Le trinôme sous la racine carrée définissant f étant toujours strictement positif (son discriminant est négatif), la fonction f est défine et dérivable (pas d'annulation sous la racine carrée) et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, si $x \geqslant 0$, $x^2 + x + 1 \geqslant 1$, donc $f(x) \geqslant 0$. Enfin, on peut dériver deux fois f pour prouver sa convexité : $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$, puis $f''(x) = \frac{4\sqrt{x^2+x+1} - \frac{(2x+1)^2}{\sqrt{x^2+x+1}}}{4(x^2+x+1)} = \frac{4(x^2+x+1) - (4x^2+4x+1)}{4(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée seconde est toujours positive, ce qui prouve que f est convexe et que $f \in A$.

   (b) Pour f', on peut écrire directement $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} \sim \frac{2x}{2x} \sim 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1$. Il faut être un peu plus soigneux pour $\tilde{f}$: $\sqrt{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, ce qu'on peut écrire sous la forme $x + o(x)$, donc $f(x) = x + o(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, puis $\tilde{f} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{f} = 1$.

   (c) On va bien sûr essayer d'exploiter un développement asymptotique, en commençant par poser $X = \frac{1}{x}$ de façon à avoir $\lim\limits_{x\to+\infty} X = 0$. On calcule alors $f(x) = \sqrt{\frac{1}{X^2} + \frac{1}{X} + 1} - 1 = \frac{1}{X}\sqrt{1+X+X^2} - 1$ (égalité valable quand $X > 0$). Or, en posant $u = X + X^2$, qui a une limite nulle, on peut appliquer un développement limité classique : $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(X^2)$, donc $\sqrt{1+X+X^2} = 1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{8}X^2 + o(X^2) = 1 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}X^2 + o(X^2)$. On en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{X} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}X - 1 + o(X) = x - \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Ce développement asymptotique nous donne les informations suivantes :

   - $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + \infty$.

- $f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{8x}$. Cette dernière expression est positive au voisinage de $+\infty$ et a une limite nulle, donc la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$, et la courbe est localement située au-dessus de son asymptote.

3. (a) On va appliquer l'IAF sur l'intervalle $[0, x]$. La fonction f étant supposée convexe, on sait que sa dérivée est croissante et donc que, $\forall t \in [0, x]$, $f'(t) \leqslant f'(x)$. On peut alors écrire que, $\forall t \in [0, x]$, $f(t) - f(0) \leqslant f'(x)(t - 0)$, soit $f(t) \leqslant tf'(x)$ puisque $f(0) = 0$ par hypothèse. Il ne reste plus qu'à appliquer cette majoration à $t = x$ pour conclure.

   (b) La fonction $\tilde{f}$ est le quotient de deux fonctions dérivables et son dénominateur ne s'annule pas sur son ensemble de définition, elle est donc dérivable. De plus, $\tilde{f}'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$, qui est positif d'après la majoration de la question précédente. La fonction $\tilde{f}$ est donc croissante sur $]0, +\infty[$.

   (c) L'inégalité de droite découle directement du fait que $f\left(\dfrac{x}{2}\right) \geqslant 0$, ce qui fait partie des hypothèses effectuées sur la fonction f. Pour celle de gauche, on va de nouveau recourir à l'IAF, mais cette fois-ci sur l'intervalle $\left[\dfrac{x}{2}, x\right]$. Toujours d'après la croissance de f', on a sur cet intervalle $f'\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqslant f'(t)$, donc $f'\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(t - \dfrac{x}{2}\right) \leqslant f(t) - f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. On pose une fois de plus $t = x$ pour obtenir exactement l'inégalité souhaitée.

4. On a prouvé en question 3.a que $\tilde{f}(x) \leqslant f'(x)$, l'implication de la droite vers la gauche en découle (f' étant minorée par une fonction tendant vers $+\infty$, elle tend également vers $+\infty$). Mais on aussi prouvé en question 2.c que $\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqslant \tilde{f}(x)$ (on oublie le membre du milieu dans l'encadrement et on multiplie par x), ce qui prouve de la même façon l'implication dans l'autre sens. On ne peut évidemment pas avoir d'asymptote oblique dans ce cas : si la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique en $+\infty$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} ax$, donc $\tilde{f}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a$, ce qui contredit $\lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = +\infty$.

5. (a) On a prouvé plus haut que la fonction $\tilde{f}$ était croissante. Si elle n'a pas une limite en $+\infty$, elle a donc nécessairement une limite finie qu'on peut noter a. Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ est équivalent à $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} ax$. Bien sûr, a est nécessairement positif puisque f est une fonction positive (et a ne peut pas être nul, j'espère ne pas avoir besoin de préciser pourquoi).

   (b) La fonction f' est elle aussi croissante (puisque f est convexe) et admet donc une limite en $+\infty$. Cette limite ne peut pas être infinie à cause de l'hypothèse faite sur $\tilde{f}$ et du résultat de la question 4, ce qui achève cette question.

   (c) L'inégalité $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant f'(x)$ donne immédiatement $a \leqslant l$ en passant à la limite. On reprend ensuite l'inégalité de gauche de l'encadrement obtenu en question 4.c : $f'\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqslant 2\dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{2}{x}f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Avec les hypothèses déjà faites dans cette question, le membre de gauche de l'inégalité a pour limite l et celui de droite tend vers $2a - a = a$, donc un passage à la limite donne la deuxième inégalité $l \leqslant a$, ce qui prouve que $a = l$.

   (d) La fonction $g : x \mapsto f(x) - ax$ est dérivable et $g'(x) = f'(x) - a = f'(x) - l$ puisque $a = l$. Or, f' est une fonction croissante ayant pour limite l en $+\infty$, donc $f'(x) \leqslant l$, ce qui prouve que g est une fonction décroissante. Elle admet donc une limite en $+\infty$ (pas nécessairement finie, on peut avoir $b = -\infty$).

(e) Si $b \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax - b = 0$, donc la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote. De plus, la fonction g étudiée à la question précédente étant décroissante, $g(x) \geqslant b$, ce qui revient exactement à dire que la courbe de f sera toujours au-dessus de son asymptote (pas seulement au voisinage de $+\infty$). Je vous laisse vous convaincre que c'est graphiquement évident pour une fonction convexe (l'asymptote n'étant rien d'autre qu'une sorte de « tangente en $+\infty$ », c'est cohérent avec les résultats déjà vus en cours sur les fonctions convexes).
Si $b = -\infty$, on ne pourra pas avoir d'asymtote. En effet, le fait que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} ax$ impose qu'une telle asymptote ait un coefficient directeur égal à a, et on est dans un cas où la courbe s'éloigne de plus en plus de toute droite d'équation $y = ax + b$.