Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 9

MPSI Lycée Camille Jullian

27 avril 2023

Exercice 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n(x+1)}\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n(x+1)^2}\,dx$.

1. Calculer les valeurs de I_0, J_0 et I_1 (pour cette dernière, on exploitera une décomposition en éléments simples).
2. Déterminer la monotonie des deux suites (I_n) et (J_n).
3. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}$, en déduire la convergence et la limite de (I_n).
4. À l'aide d'une méthode similaire à celle de la question précédente, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.
5. Calculer, pour $n \geqslant 1$, la valeur de $I_n + I_{n+1}$. En déduire un équivalent simple de I_n (attention, ce n'est pas si simple à rédiger rigoureusement).
6. Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer $J_n + J_{n-1}$ en fonction de I_n.
7. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k$ (en fonction de J_n) puis la limite de cette somme quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On considère dans cet exercice l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y-z, 7x-2y-5z, -x-y+2z) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
3. Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires.
4. Déterminer l'expression explicite de la symétrie par rapport à $\ker(f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f)$.
5. Calculer les noyaux $\ker(f+id)$ et $\ker(f-3\,id)$, et donner une base de chacun d'eux.
6. En regroupant les deux bases de la question précédente avec celle obtenue pour $\ker(f)$ en question 2, montrer qu'on obtient une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Montrer que les trois vecteurs de la base construite à la question précédente sont solutions de l'équation $f^3(u) - 2f^2(u) - 3f(u) = 0$ (inutile de faire beaucoup de calculs). En déduire rigoureusement que $f^3 = 2f^2 + 3f$.
8. Montrer par récurrence l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) telles que, $\forall n \geqslant 1$, $f^n = a_n f^2 + b_n f$.

9. Calculer explicitement a_n et b_n, en déduire une expression de f^n (on ne demande pas d'écrire explicitement $f^n(x, y, z)$).
10. On pose $p = \frac{1}{12}(f^2 + f)$ et $q = \frac{1}{4}(f^2 - 3f)$. Montrer que p et q sont des projecteurs.
11. Calculer $f \circ p$ et $f \circ q$ (on doit obtenir une expression simple en fonction de p et de q).
12. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $f^n = 3^n p + (-1)^n q$, et retrouver ainsi l'expression de f^n obtenue en question 9.

Exercice 3

On note dans tout cet exercice A l'ensemble de toutes les fonctions définies, positives, dérivables et convexes sur $[0, +\infty[$ et vérifiant de plus $f(0) = 0$. Pour toute fonction $f \in A$, on notera $\tilde{f}$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{x}$.

1. Donner des exemples de fonctions usuelles appartenant à l'ensemble A (au moins trois fonctions pour avoir les points, et pas trop évidentes).
2. Uniquement dans cette question, on pose $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - 1$.
   (a) Vérifier que $f \in A$.
   (b) Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions $\tilde{f}$ et f'.
   (c) Faire une étude locale de la fonction f en $+\infty$ (existence d'une asymptote, position relative).
3. On suppose pour toute la fin de l'exercice que $f \in A$ et que la fonction f n'est pas constante.
   (a) Montrer que, $\forall x > 0$, on a $f(x) \leqslant x f'(x)$ (on pourra exploiter l'IAF sur un intervalle bien choisi).
   (b) Vérifier que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable et croissante.
   (c) Montrer que, si $x > 0$, on a l'encadrement $\frac{x}{2} f'\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant f(x)$.
4. Montrer à l'aide des questions précédentes que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \tilde{f}(x) = +\infty$. La courbe de f peut-elle avoir une asymptote en $+\infty$ dans ce cas ?
5. On suppose dans cette question que $\tilde{f}$ n'a **PAS** une limite infinie quand x tend vers $+\infty$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} ax$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = l$.
   (c) Montrer que $l = a$ (on a le droit d'exploiter les résultats de la question 3 même si on n'a pas réussi à les prouver).
   (d) En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto f(x) - ax$, montrer l'existence de $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$.
   (e) Selon les valeurs prises par b, étudier la présence ou non d'une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$, et la position relative de la courbe et de son asymptote.