Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 8 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

25 mars 2023

Exercice 1 : polynômes

1. Les trois racines cubiques de l'unité étant égales à 1, j et j^2, on sait que $1 + j + j^2 = 0$.
2. Puisque $j^3 = 1$, on peut simplifier toutes les puissances de j en ne gardant pour chacune que le reste de la division par 3, donc $P(j) = j^2+2+3j+2j^2+1 = 3(1+j+j^2) = 0$, ce qui prouve évidemment que j est racine de P. Puisqu'on nous demande la multiplicité, calculons donc $P' = 8X^7+12X^5+12X^3+4X$, et constatons que $P'(j) = 8j+12j^2+12+4j = 12(1+j+j^2) = 0$, donc j est racine au moins double de P. Vérifions qu'elle n'est pas racine triple : $P'' = 56X^6+60X^4+36X^2+4$, donc $P''(j) = 56+60j+36j^2+4 = 60(1+j+j^2)-24j^2 = -24j^2 \neq 0$. On peut s'arrêter là, j est donc racine double du polynôme P.
3. Le polynôme P étant pair, $P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(-\alpha) = 0$. Mais P' est quand à lui impair, donc l'opposé d'une racine de P' est aussi racine de P'. Même raisonnement pour P'' (qui est pair), comme les implications peuvent être facilement retournées, le fait que α ne soit **pas** racine de P'' prouve que $-\alpha$ ne l'est pas non plus. En fait, on prouve par cette méthode que les opposés des racines de P seront aussi racines avec exactement la même multiplicité, quelle qu'elle soit.
4. La question précédente prouve que $-j$ est racine double de P. Mais comme P est un polynôme à coefficients réels, on sait également que les conjugués des racines de P seront aussi racines (avec la même multiplicité), ce qui prouve que $\overline{j} = j^2$ et $-j^2$ sont aussi racines doubles de P. On a déjà trouvé quatre racines doubles distinctes, il ne peut pas y en avoir d'autres pour un polynôme de degré 8, la liste est donc complète.
5. Le polynôme étant unitaire, la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est évidente au vu de la question précédente : $P = (X-j)^2(X+j)^2(X-j^2)^2(X+j^2)^2$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe comme d'habitude les racines conjuguées : $(X-j)(X-j^2) = X^2-(j+j^2)X+j^3 = X^2+X+1$, et $(X+j)(X+j^2) = X^2-X+1$, ce qui permet finalement d'écrire que $P = (X^2+X+1)^2(X^2-X+1)^2$.
6. Incroyable mais vrai, $(X^4+X^2+1)^2 = X^8+X^4+1+2X^6+2X^5+2X^2 = X^8+2X^6+3X^4+2X^2+1 = P$ (on ne s'y attendait pas du tout).
7. Il suffit de factoriser X^4+X^2+1. La méthode évidente consiste à poser $Z = X^2$, puis à résoudre l'équation $Z^2+Z+1 = 0$ pour obtenir les deux racines complexes $Z_1 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = j^2$ et $Z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$. Reste à calculer les racines carrées de ces deux nombres complexes, ce qui est évident au vu de leur forme trigonométrique : pour Z_1, on a $X_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}} = -j$ et $X_2 = -X_1 = j$; et pour Z_2, on a $X_3 = e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$ et $X^4 = -X_3 = j^2$. On retrouve bien sûr les racines obtenues en question 4, et donc la même factorisation ensuite.

   Sinon, on pouvait aussi utiliser la méthode astucieuse : $X^4+X^2+1 = X^4+2X^2+1-X^2 = (X^2+1)^2-X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$ pour retrouver plus rapidement la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ (mais comme l'énoncé ne précisait pas de quelle factorisation il s'agissait, on aurait quand même du recalculer les racines de ces deux derniers facteurs).

Exercice 2 : dénombrement

1. (a) Clairement, $u_1 = 1$. Ensuite, $u_2 = 2$ (on peut faire 11 ou 2), puis $u_3 = 3$ (soit 111, soit 21, soit 12), et enfin $u_4 = 5$ (les possibilités sont 22, 112, 121, 211 et 1111).

   (b) Le nombre de pas de deux marches est évidemment un entier naturel, et il est majoré par $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Si on fait k pas de deux marches, on aura donc franchi $2k$ marches à l'aide de ces pas, il en restera $n - 2k$ à faire à l'aide de pas d'une seule marche.

   (c) Si k est fixé, il faut simplement choisir l'ordre des pas, ou plus précisément quels sont les pas de deux marches parmi tous les pas effectués. Comme on fait k pas de deux marches et $k + n - 2k = n - k$ pas au total, on a donc $\binom{n-k}{k}$ façons de monter. Au total, en reprenant les résultats de la question précédente, cela fait $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$.

   (d) Appliquons la formule pour $n = 4$: $u_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \binom{4-k}{k} = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 1+3+1 = 5$. On recommence avec $n = 5$: $u_5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \binom{5-k}{k} = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 1+4+3 = 8$. Et encore une fois avec $n = 6$: $u_6 = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \binom{6-k}{k} = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 1+5+6+1 = 13$ (tous les coefficients binômiaux intervenant dans les calculs font ici partie de ceux qu'on connait par coeur).

2. (a) C'est en fait extrêmement simple : pour montrer un escalier de $n + 2$ marches, on peut soit commencer par monter $n+1$ marches (de u_{n+1} façons différentes) et terminer par un pas simple, soit monter d'abord n marches (de u_n façons) et terminer par un pas double. Comme on ne peut évidemment pas terminer à la fois par un pas simple et par un pas double, on n'a pas compté deux fois les mêmes cas (mais on les a bien sûr tous comptés), donc $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

   (b) C'est une suite récurrente linéaire (à un décalage près, c'est même la suite de Fibonacci), on écrit donc l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$, qui a pour racines $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \psi$. On peut donc affirmer l'existence de deux réels A et B tels que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = A\varphi^n + B\psi^n$. Les conditions initiales imposent $u_0 = A + B = 1$ et $u_1 = A\varphi + B\psi = 1$, donc $B = 1 - A$, puis $A\varphi + \psi - A\psi = 1$, ce qui implique $A = \dfrac{1-\psi}{\varphi-\psi} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\varphi}{\sqrt{5}}$, puis $B = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = -\dfrac{\psi}{\sqrt{5}}$. Autrement dit, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1})$.

   (c) On constate facilement que $\varphi > 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi^{n+1} = +\infty$, alors que $\psi \in]-1, 0[$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \psi^{n+1} = 0$. On a donc $\psi^{n+1} = o(\varphi^{n+1})$, en découle directement l'équivalent $u_n \sim \dfrac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}$.

3. (a) En séparant les cas suivant qu'on termine par un pas d'une, deux ou trois marches, on obtiendra de la même façon que tout à l'heure la relation $v_{n+3} = v_{n+2} + v_{n+1} + v_n$.

   (b) On a simplement $v_1 = u_1 = 1$ et $v_2 = u_2 = 2$ (difficile de faire des pas de trois marches quand il y a moins de trois marches à monter), puis $v_3 = u_3 + 1 = 4$ (le seul cas à ajouter est celui où on a monté l'escalier en un seul pas de trois marches), et enfin $v_4 = v_3 + v_2 + v_1 = 7$ (alternativement on ajoute aux cinq cas comptés pour u_3 les deux cas supplémentaires de montée faisant intervenir un pas de trois marches : 31 et 13). Pour calculer explicitement v_n à partir de la formule, il faudrait arriver à résoudre l'équation caractéristique du troisième degré $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Comme elle n'a pas l'ombre d'une racine évidente, on n'y arrivera pas.

4. Pour simplifier les choses, on suppose désormais qu'on effectue des pas de une ou deux marches, **sauf le dernier pas** qui a le droit d'être un pas de trois marches (mais ce n'est pas obligatoire !). Ainsi, on pourra monter un escalier de six marches en effectuant un parcours 123, mais pas en faisant 231 ou 312. On note w_n le nombre de façon de monter notre escalier, vous commencez à avoir l'habitude.
   (a) On a, similairement aux suites précédentes, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ et $w_3 = v_3 = 4$. Enfin, $w_4 = u_4 + 1 = 6$ (le seul cas à ajouter cette fois-ci étant le cas 13, puisque 31 n'est plus autorisé).
   (b) Il y a simplement deux cas à distinguer : soit on a effectué un pas de trois marches pour terminer la montée, ce qui signifie qu'on avait au préalable atteint la marche n en ne faisant que des pas d'une ou deux marches, soit exactement u_n possibilités ; soit on ne fait jamais de pas de trois marches et on a dans ce cas u_{n+3} possibilités. On a donc simplement $w_n = u_{n+3} + u_n$ (on peut aussi effectuer un raisonnement selon la hauteur du dernier pas effectué pour trouver la version équivalente $w_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$). Puisqu'on connait une formule explicite pour u_n, profitons-en : $\forall n \geqslant 3$, $w_n = u_n + u_{n-3} = \dfrac{\varphi^{n+1} + \varphi^{n-2} - \psi^{n+1} - \psi^{n-2}}{\sqrt{5}}$. Pour les mêmes raisons que tout à l'heure, on aura donc $w_n \sim \dfrac{(\varphi^3 + 1)\varphi^{n-2}}{\sqrt{5}}$ (non on ne peut pas simplifier davantage).

Exercice 3 : suites

1. La suite (u_n) étant une suite convergente dont la fonction itératrice, elle ne peut (éventuellement) converger que vers un point fixe de $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$. Or, la fonction f n'a pas de point fixe (l'équation $f(x) = x$ amenant tout droit à une absurdité), donc la suite ne converge pas. On prouve par récurrence triiviale que tous les termes de la suite sont strictement positifs, et on en déduit que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$, ce qui prouve la croissance de (u_n). La suite étant croissante mais ne pouvant pas converger, on a nécessairement $\lim u_n = +\infty$.

2. (a) La méthode la plus rapide consiste à exploiter des intégrales, mais on peut aussi s'en sortir de façon beaucoup plus élémentaire : posons pour commencer $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x+1}$. La fonction f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = -\dfrac{1}{x(x+1)^2} < 0$, donc f est décroissante. Comme par ailleurs $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, ce qui combiné à la décroissance de f prouve que la fonction ne prend que des valeurs strictement positives, et donc que $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x)$. ON procède de même pour l'inégalité de droite en posant cette fois-ci $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln(x)$. On calcule $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x - 1 - x^2 + x(x+1)}{x^2(x+1)} = -\dfrac{1}{x^2(x+1)} < 0$. La fonction g est donc également décroissante, et a elle aussi une limite nulle en $+\infty$ (même calcul que pour f), ce prouve notre deuxième inégalité.
   (b) En additionnant les encadrements de la question précédente pour des valeurs de x entières

comprises entre 1 et n, on obtient $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La somme du milieu est télescopique, elle est simplement égale à $\ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$. L'inégalité de droite de notre encadrement peut alors s'écrire $\ln(n+1) < H_n$. Pour l'inégalité de gauche, après un tout petit décalage d'indice, on reconnait $H_{n+1} - 1 < \ln(n+1)$, soit (quitte à appliquer pour l'entier précédent) $H_n < \ln(n) + 1$. On obtient donc finalement l'encadrement $\ln(n+1) < H_n < \ln(n) + 1$, soit $\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < H_n < \ln(n) + 1$. On peut bien sûr tout diviser par $\ln(n)$: $1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)} < \frac{H_n}{\ln(n)} < 1 + \frac{1}{\ln(n)}$. Des calculs absolument triviaux montrent que les membre de gauche et de droite de cet encadrement ont pour limite 1, on peut donc appliquer le théorème des gendarmes pour en déduire que $\lim \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$, et donc que $H_n \sim \ln(n)$.

3. Soit $\varepsilon > 0$, l'hypothèse $a_n \sim b_n$ permet d'affirmer l'existence d'un entier n_0 à partir duquel $|b_n - a_n| \leqslant \varepsilon a_n$ (cela revient exactement à dire que $a_n - b_n = o(a_n)$, ce qui implique (par inégalité triangulaire) $\left|\sum_{k=n_0}^{n} b_k - a_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n_0}^{n} a_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} a_k$ (on ne fait qu'ajouter des termes strictement positifs supplémentaires dans la dernière somme). Or, $\sum_{k=0}^{n_0-1} b_k - a_k$ étant une constante, il existe certainement un entier n_1 à partir duquel $\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} b_k - a_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} a_k$ (la somme de droite ayant par hypothèse une limite infinie). Si on prend un entier n supérieur ou égal au maximum de n_0 et de n_1, la combinaison des deux inégalités donnera $\left|\sum_{k=0}^{n} b_k - a_k\right| \leqslant 2\varepsilon \sum_{k=0}^{n} a_k$. Cette majoration étant vraie quelle que soit la valeur de ε, on peut l'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{n} b_k - a_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ (la quotient a une limite nulle), ou encore sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} (b_k - a_k) \sim \sum_{k=0}^{n} a_k$, soit $\sum_{k=0}^{n} b_k \sim \sum_{k=0}^{n} a_k$, exactement ce qu'on voulait démontrer.

4. La relation de récurrence définissant la suite (u_n) peut s'écrire $\frac{1}{u_n} = u_{n+1} - u_n$, donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$ (somme télescopique). Comme $\lim u_{n+1} = +\infty$ (cf question 1), la limite demandée en découle.

5. C'est un calcul idiot : $u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2}$, donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2}$. Comme $\lim \frac{1}{u_n^2} = 0$, on peut donc dire que $u_{n+1}^2 - u_n^2 \sim 2$. De plus, $\sum_{k=0}^{n-1} 2 = 2n$ tend certainement vers $+\infty$, et les deux suites dans notre équivalent sont à termes strictement positifs. On applique donc la question 3 pour écrire que $\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 \sim 2n$, donc $u_n^2 - u_0^2 \sim 2n$ (encore une somme télescopique). Autrement dit, $u_n^2 \sim 2n$ puisque $u_0^2 = 1 = o(2n)$. On a le droit de mettre des racines carrées autour de cet équivalent pour en déduire que $u_n \sim \sqrt{2n}$.

6. En reprenant les résultats de la question précédente, $\dfrac{1}{u_n^2} \sim \dfrac{1}{2n}$, on peut à nouveau exploiter la question 3 pour en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k^2} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{H_n}{2} \sim \frac{\ln(n)}{2}$. Le fait d'avoir sorti le terme constant $\dfrac{1}{u_0^2}$ de la somme ne change rien à l'équivalent obtenu.

7. On reprend à nouveau le calcul télescopique de la question 5 : $u_n^2 = u_0^2 + 2n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k^2} = 2n + 1 + \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n)) = 2n + \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n))$. On en déduit $u_n = \sqrt{2n}\sqrt{1 + \dfrac{\ln(n)}{4} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)}$. On peut poser $u = \dfrac{\ln(n)}{4n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$, qui a une limite nulle par croissance comparée, et appliquer le DL donné dans l'énoncé pour obtenir exactement $u_n = \sqrt{2n}\left(1 + \dfrac{\ln(n)}{8n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$.

Exercice 4 : espaces vectoriels

1. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, tout vecteur $u \in E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, et cette écriture est unique. Ainsi, le vecteur $u = -e_1$ ne peut pas s'écrire autrement comme combinaison linéaire de e_1, …, e_n, et en particulier sûrement pas comme une combinaison linéaire à coefficients tous positifs. Une base ne sera donc jamais une fpg.
2. On considère simplement les n vecteurs de la base canonique, en notant par exemple $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (avec une i-ème coordonnée égale à 1), et leurs opposés $-e_i$. La famille regroupant tous ces vecteurs (au nombre de $2n$) est toujours une fpg : si $u \in \mathbb{R}^n$, $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Pour chaque coordonnée λ_i qui est strictement négative, on remplace $\lambda_i e_i$ dans cette écriture par $(-\lambda_i)(-e_i)$, et on a désormais une combinaison linéaire à coefficients tous positifs de vecteurs de notre famille. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1))$ est une fpg. Le vecteur $u = (-3, 2)$ s'écrira sous la forme $3(-1,0) + 2(0,1)$.
3. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si x et y sont tous les deux négatifs, on n'a aucun mal à écrire u comme combinaison linéaire à coefficients positifs des deux derniers vecteurs de la famille, en écrivant $u = (-x)(-1,0) + (-y)(0,-1)$. Si au moins l'un des deux est strictement positif, on pose $M = \max(x, y)$, puis on peut écrire $u = M(1,1) + (M - x)(-1,0) + (M - y)(0,-1)$. Par définition de M, les coefficients $M - x$ et $M - y$ sont bien positifs.
4. Si $x \geqslant 0$ ou $y \geqslant 0$, c'est foutu (puisqu'une combinaison linéaire à coefficients positifs des trois vecteurs aura alors toujours une abscisse ou une ordonnée positive, on ne pourra pas obtenir tous les vecteurs). Par contre, si $x < 0$ et $y < 0$, ça marche. En effet, tout vecteur $u = (a, b)$ dont les deux coordonnées sont positives ou nulles sera combinaison linéaire à coefficients positifs de $(1,0)$ et de $(0,1)$. Dans le cas contraire, on pose $m = \max\left(\dfrac{a}{x}, \dfrac{b}{y}\right)$, qui est strictement positif, et on peut écrire $(a, b) = m(x, y) + (a - mx)(1, 0) + (b - my)(0, 1)$. Par définition de m, $m \geqslant \dfrac{a}{x}$, donc $mx \leqslant a$ (on multiplie par x qui est négatif) et de même $my \leqslant b$, donc les trois coefficients de la combinaison précédente sont bien positifs, ce qui prouve que la famille est une fpg. Un exemple concret pour ceux qui sont perdus. Si on prend $(x, y) = (-1, -2)$, et qu'on veut écrire le vecteur $(a, b) = (-42, -56)$ comme combinaison linéaire à coefficients positifs des vecteurs de notre famille, on calcule $\dfrac{-42}{-1}$ et $\dfrac{-56}{-2}$, on conserve le plus grand des deux, donc ici $m = 42$ (bien entendu, et on écrit que $(-42, -56) = 42(-1, -2) + 28(0, 1)$ (pas besoin du vecteur $(1, 0)$ pour obtenir ce vecteur particulier).

5. (a) pour avoir une base, il faut exactement trois vecteurs, et on peut bien sûr choisir $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ puisque ce sont les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (b) pour avoir une famille qui n'est pas libre, il suffit de trouver deux vecteurs colinéaires, ici on peut donc prendre $(1,0,0)$ et $(-1,0,0)$. Bien sûr, le nombre maximal de vecteurs est cinq puisque la famille complète n'est pas libre.

   (c) le nombre minimal de vecteurs est ici 0 (si on ne met rien dans la famille, elle ne risque pas d'être génératrice), pour le nombre maximal, on peut constater assez facilement que toutes les sous-familles de quatre vecteurs de $\mathcal{F}$ sont génératrices (si on garde les trois vecteurs de la base canonique c'est évident, si on supprime le premier on a son opposé pour le remplacer, et si on supprime $(0,1,0)$ ou $(0,0,1)$ on les retrouvera par combinaisons linéaires en calculant $(0,0,1)-(0,-1,-1)$ ou $(0,1,0)-(0,-1,-1)$). On peut par contre créer une famille de trois vecteurs qui n'est pas génératrice en conservant les trois derniers de la famille de départ (on peut pas obtenir de vecteurs ayant une première coordonnée non nulle à partir de ces trois là).

   (d) il faut au moins trois vecteurs pour constituer une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, et si on se contente d'en prendre trois, la famille sera une base et sera donc libre. Avec quatre vecteurs par contre, si la famille est génératrice, elle ne pourra pas être libre (sinon ce serait une base, et une base de $\mathbb{R}^3$ ne peut pas contenir quatre vecteurs). Ici, la famille $((1,0,0),(-1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est trivialement génératrice mais pas libre. Bien sûr, la famille complète reste génératrice et liée, donc le nombre maximal de vecteurs est de cinq.

   (e) la famille vide ne risque pas d'être une fpg, donc le nombre minimal de vecteurs vaut 0. Pour le nombre maximal, on constate simplement que la même famille de quatre vecteurs que celle donnée pour la question précédente n'est pas une fpg (une combinaison linéaire à coefficients positifs de ces quatre vecteurs aura nécessairement ses deux dernières coordonnées positives).

   (f) la famille complète est une fpg : on peut obtenir tout vecteur de la forme $(0,b,c)$ comme combinaison linéaire à coefficients positifs des trois derniers vecteurs de la famille (cf question 4), et bien sûr tout vecteur de la forme $(a,0,0)$ est un multiple positif de $(1,0,0)$ ou de $(-1,0,0)$. En additionnant les deux, on écrit donc tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire à coefficients positifs des cinq vecteurs de $\mathcal{F}$. Par contre, aucune sous-famille à quatre vecteurs (ou moins) n'est une fpg. Si on élimine l'un des deux premiers vecteurs, on ne pourra plus engendrer que des vecteurs dont la première coordonnées est positive (ou négative), et si on élimine un des trois autres, on aura un problème pour l'une des deux coordonnées restantes : si c'est $(0,-1,-1)$ qui est enlevé, les deux coordonnées devront être positives, et si on supprime par exemple $(0,1,0)$ on se retrouvera avec une deuxième coordonnée nécessairement négative (ce sera la troisième si on supprime $(0,0,1)$).

6. Supposons qu'il existe une telle combinaison linéaire nulle, alors on peut écrire chaque opposé de vecteur de la base comme combinaison linéaire à coefficients positifs des autres : $-e_i = \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} e_j$. Soit maintenant u un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$, on peut l'écrire sous la forme $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i e_i$ puisque la famille est supposée génératrice. On conserve tous les termes de cette somme éyant des coefficients positifs, et pour ceux ayant des coefficients négatifs, on remplace $\mu_i e_i$ par $-\mu_i \times \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} e_j$ qui n'a que des coefficients positifs. Ceci prouve bien que la famille est une fpg. Réciproquement, une fpg est évidemment génératrice, et on peut écrire le vecteur nul (comme tous les autres) comme combinaison linéaire à coefficients positifs des vecteurs e_i. Mais que faire si l'un des coefficients, par exemple λ_1, n'est pas **strictement** positif ? Pas grave, on ajoute e_1 à l'égalité, et pour compenser, on soustrait e_1, mais écrit comme

combinaison linéaire à coefficients positifs des vecteurs de la famille, histoire de conserver des autres coefficients au moins égaux à ce qu'ils étaient auparavant. Quitte à répéter cette procédure, on finira pas avoir des coefficients tous strictement positifs.

7. (a) En appliquant le théorème de la base incomplète à partir d'une famille libre vide et de la famille génératrice $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous-famille (nécessairement constituée de n vecteurs) qui est une base. Il nous restera alors au moins $n+1$ vecteurs (puisque $p \geqslant 2n+1$) qui forment donc nécessairement une famille liée, d'où la combinaison linéaire non triviale les annulant.

   (b) Puisque la famille complète est supposée être une fpg, on peut écrire une combinaison de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i e_i = 0$, avec tous les coefficients μ_i strictement positifs (question 6). On peut combiner cette égalité avec celle de la question précédente, en rajoutant un petit paramètre, pour dire que, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i + \sum_{i=n+1}^{p} (\mu_i + \alpha\lambda_i) e_i = 0$. Il suffit de trouver une valeur de α pour laquelle tous les coeffients $\mu_i + \alpha\lambda_i$ sont positifs, avec au moins l'un d'entre eux qui est nul, pour obtenir une sous-famille qui soit une fpg (on enlèvera simplement de la famille le ou les vecteurs ayant un coefficient nul dans la combinaison). Pour cela, on constante qu'on doit avoir $\alpha > -\dfrac{\mu_i}{\lambda_i}$ si $\lambda_i > 0$ et $\alpha < -\dfrac{\mu_i}{\lambda_i}$ si $\lambda_i < 0$. On pose simplement $\alpha = -\dfrac{\mu_k}{\lambda_k}$, où k est choisi de façon à rendre minimal $\left|-\dfrac{\mu_i}{\lambda_i}\right|$ lorsque i varie entre $n+1$ et p. Les conditions données ci-dessus seront alors toujours vérifiées, avec par définition $\alpha\lambda_k + \mu_k = 0$. Le vecteur e_k (et peut-être d'autres, l'indice du minimum n'a aucune raison d'être unique) disparait donc de la combinaison linéaire à coefficients strictement positifs obtenue, ce qui prouve que les vecteurs restants forment une sous-famille stricte qui est une fpg.

   (c) Il suffit d'appliquer l'algorithme précédent tant qu'on a strictement plus de $2n$ vecteurs dans la famille.

   (d) Oui, celle donnée pour la question 2 est un exemple assez évident (dès qu'on enlève un vecteur, on ne pourra plus engendrer que des vecteurs dont une des coordonnées sera nécessairement positive ou négative).

8. On a déjà vu en début d'exercice qu'une base ne pouvait pas être une fpg, donc une fpg de $\mathbb{R}^n$ contient toujours au minimum $n+1$ vecteurs. Or, il est facile de construire une fpg de $n+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}^n$: on prend la base canonique et on ajoute comme dernier vecteur le vecteur $(-1,-1,\dots,-1)$. Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est bien combinaison linéaire à coefficients positifs des vecteurs de cette famille : si toutes ses coordonnées sont positives c'est évident, et sinon on pose M égal au minimum de ses coordonnées (qui est donc strictement négatif) et, en notant $u = (x_1, \dots, x_n)$, on aura simplement $u = -M(-1,-1,\dots,-1) + (x_1 - M)(1,0,0,\dots,1) + \cdots + (x_n - M)(0,0,\dots,0,1)$, qui est bien une combinaison à coefficients tous positifs.