Devoir Surveillé n° 8

MPSI Lycée Camille Jullian

25 mars 2023

Exercice 1 : polynômes

On pose dans cet exercice $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$. On notera également, tout à fait classiquement, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Rappeler la valeur de $1 + j + j^2$.
2. Vérifier que j est une racine de P, et déterminer sa multiplicité.
3. Montrer que, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine double de P, alors $-\alpha$ est également racine double de P.
4. En exploitant les questions précédentes, donner toutes les racines complexes de P et leur multiplicité.
5. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
6. Développer $(X^4 + X^2 + 1)^2$.
7. À l'aide de la question précédente (mais **sans** utiliser les résultats des questions 1 à 5), retrouver la factorisation du polynôme P.

Exercice 2 : dénombrement

On souhaite compter le nombre de façon de monter un escalier à n marches. Il est sous-entendu pour tout l'exercice qu'on doit arriver exactement en haut de l'escalier à la fin de la montée (autrement dit, si on a par exemple atteint la marche numéro $n-1$ après un certain nombre de pas, on doit nécessairement effectuer un pas sans sauter de marche pour terminer la montée sur la marche numéro n).

1. Dans cette question, on note u_n le nombre de façons de monter l'escalier en franchissant à chaque pas soit une, soit deux marches. Ainsi, pour $n = 6$, on peut montrer l'escalier en faisant deux pas de deux marches puis deux pas d'une marche (ce qu'on notera plus simplement 2211), ou bien six pas d'une marche (111111), ou encore un certain nombre d'autres possibilités. On admet qu'il est cohérent de poser $u_0 = 1$.
   (a) Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4 (en faisant la liste de toutes les possibilités, ou au moins en donnant une explication claire).
   (b) En notant k le nombre de pas de deux marches effectués, quelles valeurs peut prendre l'entier k ? Combien aura-t-on fait de pas d'une marche si on en fait k de deux marches ?
   (c) À k fixé, quel est le nombre de façons de monter l'escalier ? En déduire une formule pour u_n sous forme de somme (qu'on ne cherchera pas à simplifier).
   (d) Vérifier à l'aide de cette formule votre valeur de u_4, puis calculer (toujours avec la formule) u_5 et u_6.

2. Dans cette question, on veut calculer explicitement la valeur de u_n sans utiliser les résultats de la question précédente.
   (a) À l'aide d'un raisonnement combinatoire, montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   (b) En déduire une formule explicite pour u_n en fonction de n.
   (c) Donner un équivalent (le plus simple possible) de u_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Dans cette question on autorise désormais à franchir une, deux ou trois marches à chaque pas. On notera v_n le nombre de façons de monter notre escalier à n marches avec cette modification.
   (a) Quelle relation de récurrence similaire à celle de la question 2.a sera vérifiée par la suite (v_n) ?
   (b) Donner les valeurs de v_n pour $n \leqslant 4$. Peut-on calculer facilement une expression générale de v_n à partir de la relation de récurrence obtenue ?
4. Pour simplifier les choses, on suppose désormais qu'on effectue des pas de une ou deux marches, **sauf le dernier pas** qui a le droit d'être un pas de trois marches (mais ce n'est pas obligatoire !). Ainsi, on pourra monter un escalier de six marches en effectuant un parcours 123, mais pas en faisant 231 ou 312. On note w_n le nombre de façon de monter notre escalier, vous commencez à avoir l'habitude.
   (a) Déterminer les valeurs de w_n pour $n \leqslant 4$.
   (b) Exprimer w_{n+3} en fonction des termes de la suite (u_n). En déduire une expression explicite de w_n et un équivalent simple de w_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : suites

On s'intéresse dans cet exercice à la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Les questions 2 et 3 visent à démontrer des résultats utiles pour la suite et sont totalement indépendantes du reste de l'exercice.

1. La suite (u_n) peut-elle converger ? Montrer que (u_n) est croissante, et en déduire sa limite.
2. On note dans cette question $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Montrer que, $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
   (b) En déduire un encadrement de H_n, puis prouver que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
3. On suppose que (a_n) et (b_n) sont deux suites à termes strictement positifs telles que $a_n \sim b_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = +\infty$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} a_k$ (question difficile, on pourra admettre le résultat ; pour les motivés, une bonne idée est de revenir à des ε et de découper les sommes en deux).
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = +\infty$ (cette somme se calcule très bien).
5. Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \dfrac{1}{u_n^2}$. En déduire $u_n \sim \sqrt{2n}$ en exploitant le résultat de la question 3.

6. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k^2}$.
7. Montrer que $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} 2n + \dfrac{1}{2}\ln(n)$, puis que $u_n = \sqrt{2n}\left(1 + \dfrac{\ln(n)}{8n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$.
Pour ce dernier calcul, on pourra utiliser le développement limité suivant : $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x + o(x)$.

Exercice 4 : espaces vectoriels

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ est une famille positivement génératrice (abrégé en fpg pour la suite de l'exercice) si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ dont tous les coefficients sont positifs.

1. Une base de E peut-elle être une fpg (on justifiera bien sûr la réponse donnée) ?
2. Montrer qu'il existe toujours une fpg dans $\mathbb{R}^n$ (on pourra créer une fpg contenant $2n$ vecteurs en partant de la base canonique).
3. Montrer que la famille $((1,1), (-1,0), (0,-1))$ est une fpg de $\mathbb{R}^2$.
4. Toujours dans $\mathbb{R}^2$, on considère la famille $\mathcal{F} = ((1,0), (0,1), (x,y))$. À quelles conditions sur les réels x et y la famille $\mathcal{F}$ est-elle une fpg ?
5. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la famille $\mathcal{F} = ((1,0,0), (-1,0,0), (0,-1,-1), (0,1,0), (0,0,1))$. Pour chacune des conditions suivantes, déterminer (en justifiant rapidement) une sous-famille de vecteurs de $\mathcal{F}$ qui la vérifie, et préciser à chaque fois le nombre minimal et maximal de vecteurs d'une sous-famille de $\mathcal{F}$ vérifiant la condition :
   (a) la sous-famille est une base de $\mathbb{R}^3$
   (b) la sous-famille n'est pas libre
   (c) la sous-famille n'est pas génératrice
   (d) la sous-famille est génératrice mais pas libre
   (e) la sous-famille n'est pas une fpg
   (f) la sous-famille est une fpg
6. Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une fpg si et seulement si elle est génératrice et s'il existe des réels strictement positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$.
7. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une fpg de $\mathbb{R}^n$, avec $p \geqslant 2n+1$.
   (a) Justifier que, quitte à changer l'ordre des vecteurs de la famille, on peut supposer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et qu'il existe des réels $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{p} \lambda_i e_i = 0$
   (b) Montrer qu'on peut extraire de $\mathcal{F}$ une sous-famille stricte (ne contenant donc pas tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ qui soit encore une fpg.
   (c) En déduire qu'on peut extraire de toute fpg dans E une sous-famille de cardinal inférieur ou égal à $2n$ qui est encore une fpg.
   (d) Existe-t-il des fpg de cardinal $2n$ dont aucune sous-famille stricte n'est une fpg ?
8. Montrer que le nombre minimal de vecteurs dans une fpg de $\mathbb{R}^n$ est toujours égal à $n+1$.