Devoir Surveillé n° 7 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

4 mars 2023

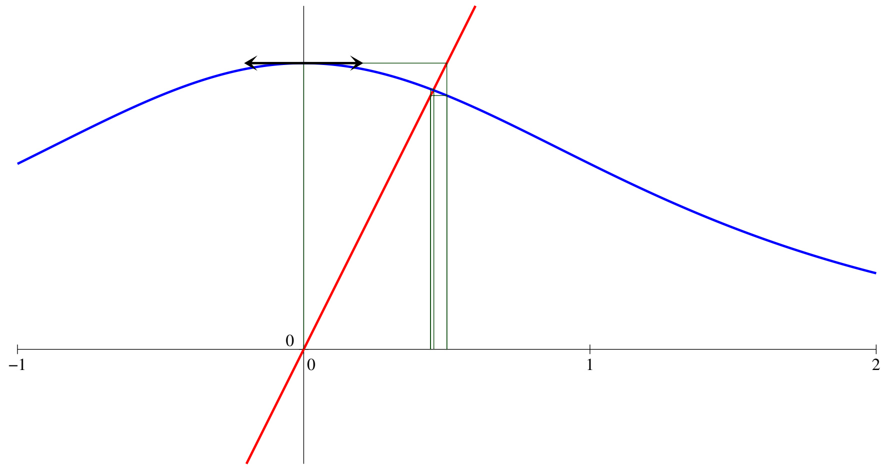
Exercice 1

1. La fonction f est certainement dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = \dfrac{e^x(e^{2x}+1) - 2e^{2x}e^x}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$. Cette dérivée est du signe de $1 - e^{2x}$, qui est positif si $e^{2x} \leqslant 1$, donc si $x \leqslant 0$. La fonction sera donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, avec pour maximum $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Enfin, on a sans difficulté $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, et les plus malins constateront que, quitte à diviser numérateur et dénominateur par e^x, on a $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{2}{\mathrm{ch}(x)}$, ce qui prouve que f est paire, et accessoirement que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. On peut conclure en dressant le petit tableau de variations suivant :

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & 0 & & +\infty \\
\hline
 & & & \frac{1}{2} & & \\
f & & \nearrow & & \searrow & \\
 & 0 & & & & 0 \\
\hline
\end{array}$$

2. De toute évidence, $f(x) - x > 0$ quand $x \leqslant 0$ puisqu'on a alors $f(x) > 0$ et $x \leqslant 0$. Sur $[0, +\infty[$, la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante (elle est la différence d'une fonction décroissante et d'une fonction croissante), et vérifie $g(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, donc elle est bijective de $[0, +\infty[$ vers $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$, et en particulier s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}^+$. Ceci prouve bien que f admet un unique point fixe l, que $f(x) - x \geqslant 0$ sur $]-\infty, l]$ et $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[l, +\infty[$. Enfin, il suggit de constater que $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} \leqslant 0$ (la fonction f étant majorée par $\dfrac{1}{2}$) pour constater que la fonction g s'annule sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ (théorème des valeurs intermédiaires).

3. Une tentative de représentation avec zoom sur la zone intéressante (et échelle différente sur les deux axes), on ne voit malgré tout pas grand chose car la suite converge quand même vraiment vite :



4. On a déjà prouvé que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, et f étant décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, la stabilité de l'intervalle en découle. Une récurrence triviale montre alors que $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$: c'est vrai par hypothèse pour u_0 et l'hérédité $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow u_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ découle de la stabilité de l'intervalle par f.
5. L'encadrement $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$, d'ailleurs valable sur $\mathbb{R}$ tout entier, découle directement de l'étude des variations de f. De plus, si $x \geqslant 0$, $|f'(x)| = \frac{e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} = f(x) \times \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Comme $0 \leqslant e^{2x} - 1 \leqslant e^{2x} + 1$ sur $[0, +\infty[$, on en déduit facilement que $|f'(x)| \leqslant f(x)$.
6. On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis sur $[0, +\infty[$ pour obtenir que, $\forall (y, z) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $|f(z) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|z - y|$. Il suffit alors de poser $y = l$ (qui est bien positif), donc $f(y) = l$ puisque l est point fixe de f, et $z = u_n$ (qui est toujours positif) pour avoir exactement la première inégalité demandée dans l'énoncé. La seconde se prouve bien sûr par récurrence : pour $n = 0$, $|u_0 - l| = l \leqslant \frac{1}{2}$ d'après la question 2, et si on suppose l'inégalité vérifiée au rang n, alors $|u_{n+1} - l| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - l| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$ en exploitant successivement la première inégalité obtenue dans cette question puis l'hypothèse de récurrence.
7. On a donc $0 \leqslant |u_n - l| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on peut en déduire que $\lim |u_n - l| = 0$, donc que (u_n) converge vers l. L'inégalité obtenue permet par ailleurs d'affirmer que $|u_n - l| \leqslant 10^{-5}$ dès que $\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-5}$ (et même peut-être avant), donc si $2^{n+1} \geqslant 10^5$. Même pas besoin de passer aux logarithmes ici si on connait un peu ses puissances de 2. On sait que 2^{10} est légèrement supérieur à 1 000, et $2^7 = 128$, donc $2^{17} > 10^5$, ce qui permet de prendre $n = 16$.
8. Non, la fonction f étant bornée par 0 et $\frac{1}{2}$, on aura toujours $u_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ quelle que soit la valeur de u_0, et on pourra donc appliquer les mêmes calculs que ci-dessus, quitte à isoler le premier terme de la suite.

Exercice 2

1. (a) Puisque le dénominateur $e^x + 1$ ne peut jamais s'annuler, $\mathcal{D}_{f_n} = \mathbb{R}$.

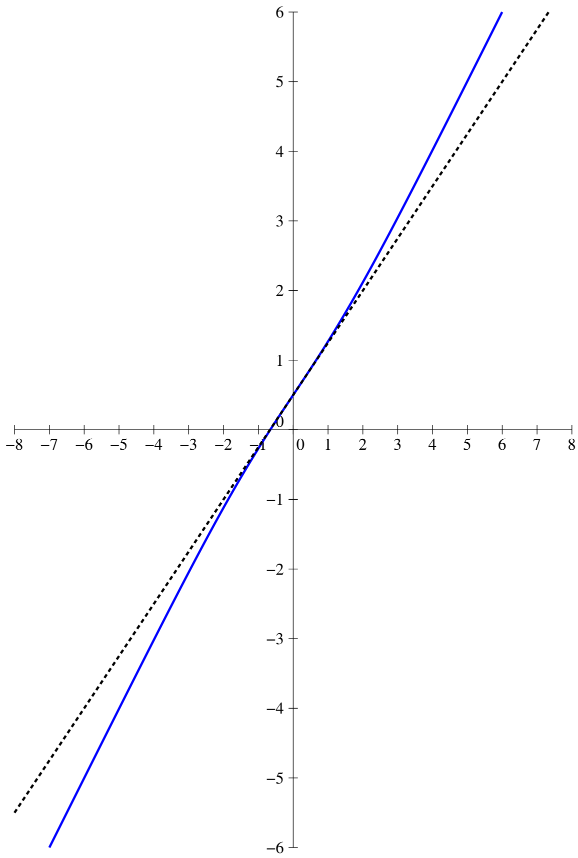
(b) La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $f_n'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} + n$, puis $f_n''(x)$ $= \dfrac{-e^x(1+e^x)^2 + 2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \dfrac{2e^{2x} - e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$.

(c) La fonction f_n'' est du signe de $e^x - 1$, donc positive sur $[0, +\infty[$ et négative sur $]-\infty, 0]$. La fonction f_n' admet donc un minimum en 0, de valeur $f_n'(0) = n - \dfrac{1}{4} > 0$, donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme on nous demande des tableaux de variation complets, calculons en plus les limites des deux fonctions. On peut écrire $f_n'(x) = n - \dfrac{1}{e^{-x} + 2 + e^x}$ pour obtenir facilement $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_n'(x) = n$. Pour f_n, il n'y aucune forme indéterminée à gérer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'	n	$\searrow$	$n - \frac{1}{4}$	$\nearrow$	n
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

(d) La dérivée seconde calculée plus haut s'annule uniquement quand $e^x = 1$, donc pour $x = 0$. Comme $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$ quelle que soit la valeur de n, le point $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est donc un point d'inflexion commun à toutes les courbes. Puisque $f_n'(0) = n - \dfrac{1}{4}$, l'équation de la tangente correspondante est donc $y = \left(n - \dfrac{1}{4}\right)x + \dfrac{1}{2}$. En particulier, pour $n = 1$, la tangente aura pour équation $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

(e) Il n'y a pas grand chose à faire à part respecter la position relative de la courbe par rapport à sa tangente (la fonction doit être concave et en-dessous de sa tangente sur $\mathbb{R}^-$, convexe et au-dessus sur $\mathbb{R}^+$).



2. (a) En effet, la fonction f_n est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc c'est évident.

(b) On sait déjà que $f_n(0) = \dfrac{1}{2} > 0$, calculons donc $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} - 1 < 0$ puisque $\dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} < 1$. On en déduit que $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) < f_n(u_n) < f_n(0)$, ce qui par croissance de la fonction f_n suffit à démontrer que $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.

(c) On calcule $f_{n+1}(u_n) = \dfrac{1}{1+e^{u_n}} + (n+1)u_n$. Or, par définition de la suite, $f_n(u_n) = \dfrac{1}{1+e^{u_n}} + nu_n = 0$, donc $f_{n+1}(u_n) = u_n$. En particulier, d'après l'encadrement de la question précédente, $f_{n+1}(u_n) < 0$. Or, toujours par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. On en déduit que $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, dont découle (par croissance de f_{n+1}) $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc strictement croissante. Ce calcul ne sert absolument à rien puisque l'encadrement de la question précédente suffit à prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (théorème des gendarmes).

(d) Par définition de la suite, on sait que $\dfrac{1}{1+e^{u_n}} + nu_n = 0$, ou encore que $nu_n = -\dfrac{1}{1+e^{u_n}}$. Mais comme (u_n) a une limite nulle, on a certainement $\lim \dfrac{1}{1+e^{u_n}} = \dfrac{1}{2}$, donc $\lim nu_n = -\dfrac{1}{2}$.

(e) Calculons donc $n^2u_n + \dfrac{n}{2} = n \times nu_n + \dfrac{n}{2} = n\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1+e^{u_n}}\right) = \dfrac{n(1-e^{u_n})}{2(1+e^{u_n})} = nu_n \times \dfrac{1-e^{u_n}}{u_n} \times \dfrac{1}{2(1+e^{u_n})}$. Or, on sait que $\lim nu_n = -\dfrac{1}{2}$, et que $\lim u_n = 0$, donc $\lim \dfrac{1-e^{u_n}}{u_n} = 1$ (taux d'accroissement de la fonction exponentielle avec une variable qui tend vers 0). Le dernier terme du produit ne posant pas de problème, on peut donc calculer $\lim n^2u_n + \frac{n}{2} = -\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$. Autrement dit, $\lim n^2u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{8} = 0$. En notant $\varepsilon(n)$ cette expression, on a donc $n^2u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{8} = \varepsilon(n)$, ce qui donne bien en divisant tout par n^2 et en passant quelques termes à droite $u_n = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2}$.

Exercice 3

1. Calculons donc $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -12 \\ 8 & 12 & -24 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$. Tous les coefficients en-dehors de la diagonale ont été multipliés par 4 par rapport à ceux de A, et la diagonale, après être multipliée par 4, doit être diminuée de 4 pour donner celle de A^2. Autrement dit, $A^2 = 4A - 4I_3$. On peut en déduire que $I_3 = A - \frac{1}{4}A^2 = A\left(I_3 - \frac{1}{4}A\right)$. La matrice A est donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

2. Pour effectuer les premières étapes du pivot de Gauss, il est préférable de ne pas avoir de coefficient dépendant de x sur la diagonale, c'est pour cela qu'on va commencer par un petit échange de lignes. Par ailleurs, on ne fera qu'une petite partie du pivot, la seule nécessité étant de transformer $A - xI_3$ en matrice triangulaire :

$$\begin{pmatrix} 3-x & 1 & -3 \\ 2 & 4-x & -6 \\ 1 & 1 & -1-x \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-x \\ 2 & 4-x & -6 \\ 3-x & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (x-3)L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-x \\ 0 & 2-x & 2x-4 \\ 0 & x-2 & -x^2+2x \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-x \\ 0 & 2-x & 2x-4 \\ 0 & 0 & -x^2+4x-4 \end{pmatrix}$$

   On peut arrêter le calcul ici, la matrice est inversible si et seulement aucun des coefficients diagonaux obtenus lors de la dernière étape n'est nul. Elle n'est donc pas inversible si $2-x=0$ ou si $x^2-4x+4=(x-2)^2=0$, ce qui se produit pour l'unique valeur $x=2$ (cas assez exceptionnel, en général une matrice carrée d'ordre 3 aura trois valeurs de x pour lesquelles $A - xI_3$ n'est pas inversible, valeurs pouvant éventuellement être complexes).

3. L'équation à résoudre peut se mettre sous la forme d'un système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & = & 2x \\ 2x & + & 4y & - & 6z & = & 2y \\ x & + & y & - & z & = & 2z \end{array}\right.$.
   Les trois équations de ce système étant équivalentes à l'unique condition $x+y-3z=0$, il sera vite résolu : $\mathcal{S} = \{(3z-y, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$. En particulier, la solution vérifiant $y=1$ et $z=0$ est $(-1,1,0)$ et celle vérifiant $y=0$ et $z=1$ est $(3,0,1)$. Ces deux calculs ont un lien avec le choix de la matrice P (regardez les deux premières colonnes de celle-ci) que nous

ne pouvons pas encore bien comprendre. Bien sûr, le fait d'avoir résolution spécifiquement l'équation $AX = 2X$ et d'avoir obtenu des tas de solutions est aussi en lien avec le fait que 2 est la seule valeur pour laquelle $A - xI_3$ n'est pas inversible.

4. Utilisons donc la méthode du système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 3y & + & z & = & a \\ x & & & & & = & b \\ & & y & & & = & c \end{array}\right.$ se résout sans faire de calcul ou presque, il suffit de constater que $z = x - 3y + a = a + b - 3z$ pour conclure que la matrice P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Chouette, une question bêtement calculatoire : $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice obtenue est bien triangulaire supérieure, tout va bien.

6. C'est une récurrence hyper classique. Pour $n = 0$, $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$, donc la formule est vérifiée. Si on la suppose vérifiée au rang n, alors $A^{n+1} = A \times A^n = APT^nP^{-1}$. Or, $P^{-1}AP = T$, donc en mutlipliant par P à gauche, $AP = PT$. On remplace dans le calcul précédent pour obtenir $A^{n+1} = PTT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$, ce qui achève la preuve de l'hérédité.

7. La matrice N vérifie donc $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul immédiat donne $N^2 = 0$, et donc $N^k = 0$ pour tout entier $k \geqslant 2$. Par ailleurs, les matrices N et $2I_3$ commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton pour obtenir $T^n = (N + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I_3)^{n-k} = 2^n I_3 + n2^{n-1}N$ (les termes suivants sont tous nuls). Un peu de calcul pour terminer la question : $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^n \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, puis $PT^n = \begin{pmatrix} -2^n & 3 \times 2^n & (n+2)2^{n-1} \\ 2^n & 0 & n2^n \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \end{pmatrix}$, et enfin $A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (n+2)2^{n-1} & n2^{n-1} & -3n2^{n-1} \\ n2^n & (n+1)2^n & -3n2^n \\ n2^{n-1} & n2^{n-1} & (2-3n)2^{n-1} \end{pmatrix}$. Si on n'a pas confiance en ses calculs, on vérifie que ça donne la bonne matrice pour A^2 (c'est bien le cas).

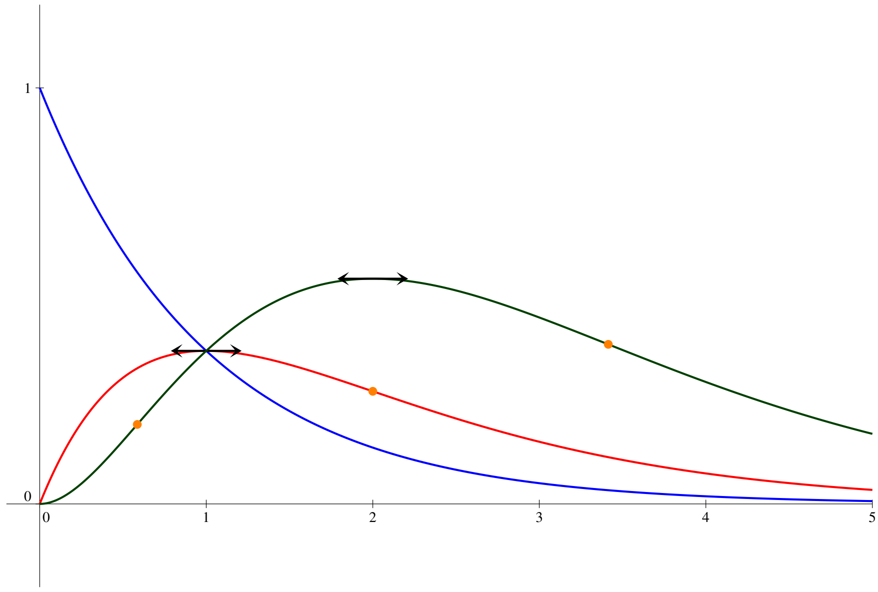
8. On remplace donc n par -1, autrement dit tous les 2^n par des $\frac{1}{2}$ et les 2^{n-1} par des $\frac{1}{4}$, et on trouve la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$. On ne peut que constater que ça marche fort bien !

Exercice 4

1. Toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $f_n'(x) = -e^{-x}x^n + ne^{-x}x^{n-1} = e^{-x}x^{n-1}(n-x)$. Sur $[0, +\infty[$, le signe de cette dérivée est simplement celui de $n-x$, donc f_n est croissante sur $[0, n]$ et décroissante sur $[n + \infty[$, avec pour maximum $f_n(n) = e^{-n}n^n = \left(\frac{n}{e}\right)^n$. De plus, $f_n(0) = 0$ (sauf pour $n = 0$ où on a f_n qui atteint son maximum de hauteur 1 en 0) et $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ par croissance comparée. On dérive une deuxième fois : $f_n''(x) = e^{-x}x^n - 2ne^{-x}x^{n-1} + n(n-1)e^{-x}x^{n-2} = e^{-x}x^{n-2}(x^2 - 2nx + n^2 - n)$. La dérivée seconde est donc du signe du trinôme $x^2 - 2nx + n^2 - n$, qui a pour discriminant $\Delta = 4n^2 - 4(n^2 - n) = 4n$

et pour racines $x_1 = \dfrac{2n - 2\sqrt{n}}{2} = n - \sqrt{n}$ et $x_2 = n + \sqrt{n}$. En oubliant le cas $n = 0$ (où la dérivée seconde est positive et la fonction convexe), on a donc deux valeurs d'annulation de f'' qui sont toutes les deux strictement positives, l'une inférieure à n et l'autre supérieure à n (dans le cas où $n = 1$ on aura $x_1 = 0$). On n'essaiera pas de calculer les valeurs de f_n aux points correspondants car ça ne se simplifie pas vraiment.

2. Rappelons simplement que la courbe de f_0 est convexe, celle de f_1 concave sur $[0, 2]$ puis convexe sur $[2, +\infty[$ (avec pour maximum $f_1(1) = \dfrac{1}{e}$), et celle de f_2 concave uniquement sur $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$, avec pour maximum $f_2(2) = \dfrac{4}{e^2}$. Signalons enfin que $f_1(2) = \dfrac{2}{e^2}$. On a indiqué par de gros points oranges les points de changement de convexité :



3. Par définition, $L_0(x) = e^x f_0(x) = e^x e^{-x} = 1$, puis $L_1(x) = e^x f_1'(x) = e^x e^x (1 - x) = 1 - x$ et $L_2(x) = \dfrac{e^x}{2} f_2''(x) = \dfrac{e^x}{2} e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

4. Pour $n = 0$, la somme contient un seul terme égal à 1. Pour $n = 1$, elle vaut $1 + \dbinom{1}{1} \times (-x) = 1 - x$. Enfin, pour $n = 2$, on calcule $1 - \dbinom{2}{1}x + \dbinom{2}{2}\dfrac{x^2}{2!} = 1 - 2x + \dfrac{1}{2}x^2$. Ces formules correspondent bien aux calculs de la question précédente.

5. En posant $g(x) = e^{-x}$ et $h(x) = x^n$, on a $f_n(x) = g(x)h(x)$. On peut alors appliquer la formule de Leibniz pour calculer $f_n^{(n)}$: $g^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ (on change le signe à chaque dérivation) et $h^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ (calcul classique, on fait une récurrence si on veut vraiment être hyper rigoureux). On en déduit que $f_n^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!(-1)^k e^{-x} x^k}{k!}$, puis $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} f_n^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$.

6. On constate simplement que $f_{n+1}(x) = x f_n(x)$, et on applique la formule de Leibniz, en ne gardant que les deux premiers termes puisque les dérivées ultérieures de l'identité vont s'annuler : $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x)$.

7. Par définition, $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)! e^{-x} L_{n+1}(x)$. De même, $f_n^{(n)}(x) = n! e^{-x} L_n(x)$, donc $f_n^{(n+1)}(x) = -n! e^{-x} L_n(x) + n! e^{-x} L_n'(x)$. En reportant ces formules dans l'équation obte-

nue à la question précédente et en simplifiant par $n!$ et par $e-x$, il reste $(n+1)L_{n+1}(x) = -xL_n(x) + xL_n'(x) + (n+1)L_n(x) = xL_n'(x) + (n+1-x)L_n(x)$.

8. Via la formule de Pascal, on peut écrire $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, donc $\frac{1}{(k-1)!}\binom{n}{k} + \frac{1}{(k-1)!}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{(k-1)!k!(n+1-k)!}$. Par ailleurs, toujours en exploitant la formule de Pascal (mais dans un sens un peu inhabituel, $\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}$, donc $\frac{n+1}{k!}\binom{n+1}{k} - \frac{n+1}{k}\binom{n}{k} = \frac{n+1}{k!}\binom{n}{k-1} = \frac{(n+1)n!}{k!(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(k-1)!(n+1-k)!}$. À un très léger réarrangement des termes près, on vient de démontrer l'égalité demandée.

9. Allons-y donc pour une récurrence. Le résultat pour $n=0$ a déjà été vérifié à la question 4, supposons donc la formue correcte au rang n, alors on peut écrire $L_n'(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!} \times kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^{k-1}$. On calcule alors, en exploitant bien entendu le résultat de la question 7, $(n+1)L_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^k + (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^k + (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^k$ avec un petit décalage d'indices sur la dernière somme (le $(-1)^k$ n'a pas été modifié mais le signe devant la somme changé pour compenser). On peut regrouper tous les termes d'indice compris entre 1 et n (et sortir les autres des sommes) et utiliser la question précédente pour obtenir $L_{n+1}(x) = (n+1)\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k + (n+1) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n+1}$ (les deux termes sortis sont ceux d'indice 0 de la somme du milieu, qui vaut donc $n+1$ et celui d'indice $n+1$ de la somme de droite). Il ne reste qu'à diviser par $n+1$ et constater que, miraculeusement, les deux termes sortis se réinsèrent en tant que terme d'indice 0 et terme d'indice $n+1$ dans la somme pour donner exactement la formule prouvant l'hérédité.

10. On peut utiliser les relations obtenues en cours d'exercice, mais on peut aussi bourriner salement puisqu'on a une formule explicite. On a déjà calculé $L_n'(x)$ sous forme de somme plus haut, constatons donc que $L_n'(x) - L_{n+1}'(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^{k-1} = -\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^{k-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k + \frac{(-1)^n}{n!}x^n = L_n(x)$ (encore une fois, le changement de signe lors du décalage d'indice est compensé par le fait qu'on ne modifie pas le $(-1)^k$ dans la somme).